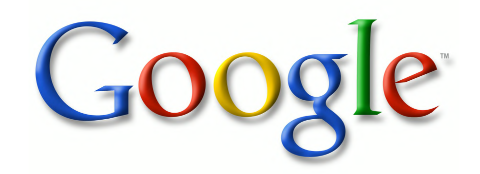
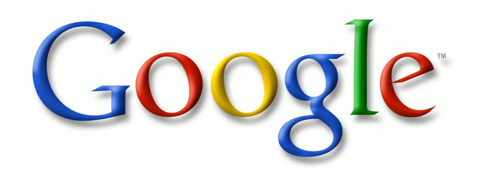
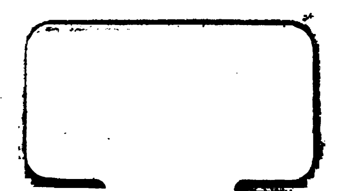
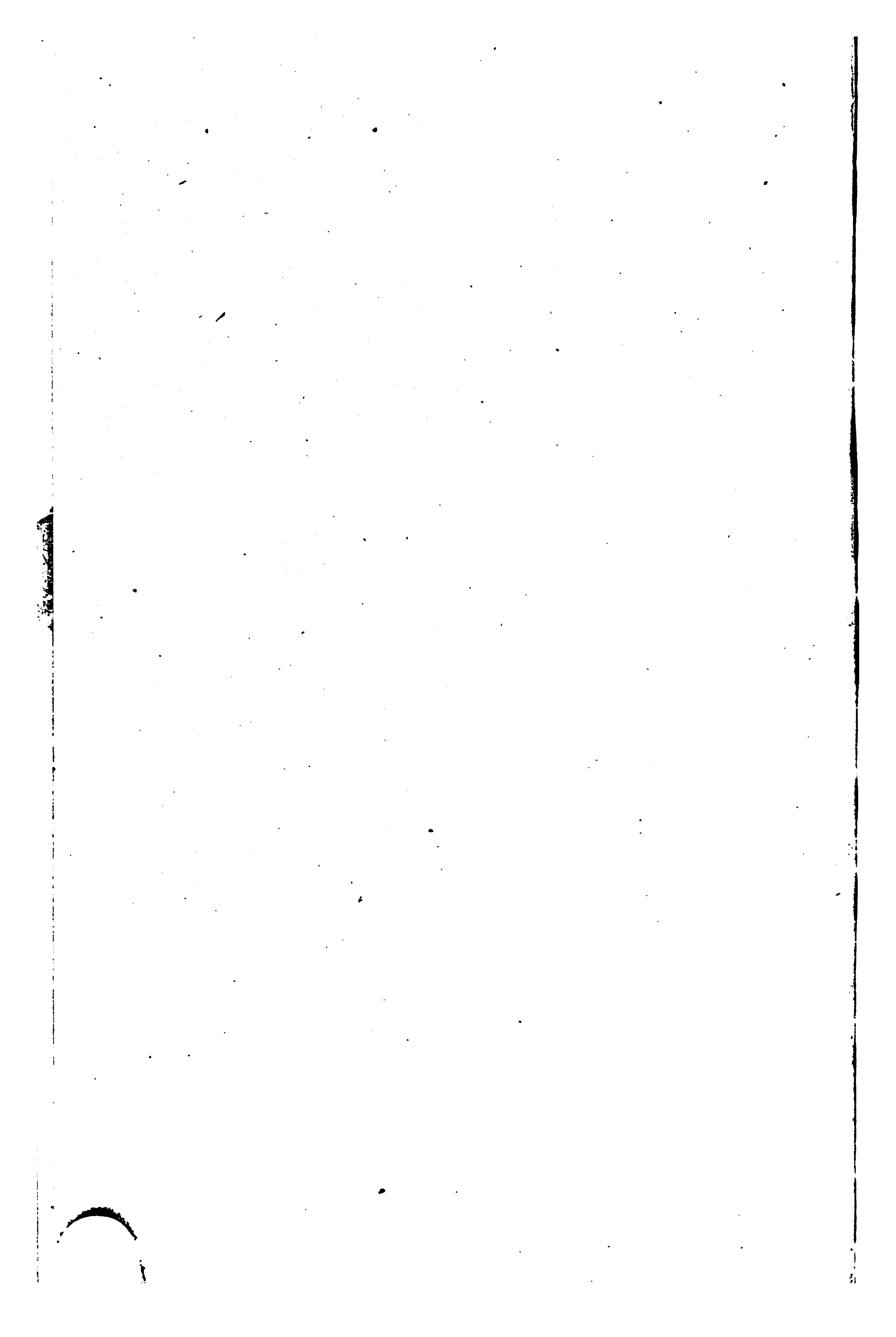








STATIK DER RAUMFACHWERKE

VON

DR. WILHELM SCHLINK
DIPL. INGENIEUR
PRIVATDOZENT AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN DARMSTADT

MIT 214 ABBILDUNGEN UND 2 TAFELN



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1907

Vorwort.

Das vorliegende Werk, das unter den bis jetzt erschienenen Büchern über räumliche Stabsysteme das umfassendste ist, stellt sich die Aufgabe, bei Voraussetzung von nur ganz elementaren Kenntnissen der Mechanik, die Raumfachwerke, ihre Bildungsweise, Stabilitätsuntersuchungen und Spannungsbestimmungen möglichst vielseitig darzustellen; der Leser soll durch dasselbe in die Lage gesetzt werden, einerseits jedes beliebige Raumfachwerk zu berechnen, andrerseits für jede gegebene architektonische Überdeckungsform ein zweckmäßig gebautes System in einfacher Weise herzustellen.

Um das Verständnis zu erleichtern, wird in einer Einleitung das ebene Fachwerk in seinen allgemeinen Gesetzen betrachtet. Weiter werden dann im ersten Abschnitt in systematischer Weise die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte, im Anschluß daran die Stabilitäts- und Spannungsuntersuchungen der Fachwerke im Raum eingehend besprochen; hierbei die verschiedenen Methoden von Föppl, Henneberg, Mohr, Müller-Breslau, die gerade in den letzten Jahren vielfach erörtert wurden, ausführlich behandelt und besonders auch ihr Zusammenhang näher beleuchtet. Dem Flechtwerk, das vor allem für Dachfachwerke von der größten Bedeutung ist, wurde ein besonderer Paragraph gewidmet, und dabei außer dem Föpplschen Flechtwerk gleich das mehrfach-zusammenhängende Flechtwerk eingeführt.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit den Kuppeln und allgemeineren Dachfachwerken, während andere Raumsysteme, wie Gerüste usw., am Schluß des ersten Abschnitts eingehend betrachtet wurden. Diese verschiedenartigsten Fachwerksträger bieten Gelegenheit, die Untersuchungen vielseitig zu gestalten, vor allem auch nach Möglichkeit spezielle Verfahren zu benützen, z. B. das Momentenverfahren, das zuerst von Landsberg auf die bekannten Kuppelformen angewendet wurde. Auf die Stabilitätsuntersuchungen, die sowohl direkt kinematisch, wie auch auf Grund des Föpplschen Satzes auf

statischem Weg durchgeführt werden können, wurde bei den einzelnen Systemen besonderer Wert gelegt.

Nach ausführlicher Besprechung der verschiedenen bekannten Kuppelsysteme und Angabe verschiedener Berechnungsverfahren wurden dann allgemeine Sätze zur Bildung von beliebigen Dachfachwerken abgeleitet und diese zur Herstellung neuer Systeme benützt. Die so gewonnenen Dachfachwerke, die ebenso wie die Föpplschen Flechtwerksdächer gegenüber den üblichen Dachkonstruktionen (aus einzelnen ebenen Bindern als Hauptteilen bestehend) wesentliche, vorteilhafte Unterschiede aufweisen, wurden ausführlich behandelt und durch Zahlenbeispiele erläutert. In diesem Abschnitt wurden Teile meiner früheren Abhandlungen verwendet; im übrigen dürfte sich, abgesehen von der Darstellungsweise in manchen Kapiteln, auch sonst einiges Neue finden.

Daß die freien und gestützten Systeme in dem ersten Abschnitt getrennt behandelt wurden, geschah in der Absicht, die verschiedenen Methoden zunächst möglichst allgemein darstellen zu können. Durch Einführung des erweiterten Systems läßt sich ja jeder Träger als freies System darstellen, so daß ersterer nichts wesentlich Neues bietet; da aber das so entstandene freie Fachwerk spezielle Bauweise besitzt, werden für die gestützten Systeme die Methoden vereinfacht. Die systematische und einheitliche Darstellungsweise wurde besonders berücksichtigt, weshalb auch bei allgemeinen Untersuchungen statt der Lager die Stützungsstäbe eingeführt wurden.

Der Nachtrag geht nochmals ausführlich auf die Berechtigung des Hennebergschen Satzes ein; dies erschien angebracht, da eine große Anzahl der Stabilitätsuntersuchungen auf diesem Satz, der für manche Systeme die einfachste Methode darstellt, beruht. Am Schluß des Nachtrags finden sich schließlich einige Bemerkungen betreffs des auf Rollenlagern gestützten Rings, für den vorn im Text ein Versehen unterlaufen ist.

Wenn auch das Buch in erster Linie dem Techniker dienen soll, so dürfte doch auch der Mathematiker darin manches für ihn Interessante finden, indem er daraus erkennt, mit welchen Methoden die Techniker rechnen. Dem Zweck

des Buchs entsprechend sind allerdings die theoretischen Verfahren bezüglich Kräftewirkungen nur soweit gebracht, als sie gerade für Raumfachwerke Bedeutung haben. Es ist deshalb z. B. bei Zerlegung der Kräfte in sechs Richtungen im Raume in erster Linie von der Momentenmethode (nach Föppl) Gebrauch gemacht, dagegen fehlen die Verfahren, die auf dem Nullsystem beruhen; in den Anmerkungen sind jedoch die Arbeiten angegeben, die sich auf diese beziehen.

Die Literaturangaben verfolgen einen doppelten Zweck: sie sollen einerseits den Leser auf die betreffenden Originalarbeiten hinweisen, andrerseits ihm Werke nennen, in denen er über den gewünschten Gegenstand ebenfalls Ausführungen findet, um ihm so die Möglichkeit zu geben, auch verschiedene Darstellungsweisen desselben Stoffs kennen zu lernen.

Kurze Wiederholungen sind im vorliegenden Werk nicht ängstlich vermieden, da sie im Interesse des Zusammenhangs öfters von Vorteil sind. Die verschiedenen Beispiele wie die große Anzahl Abbildungen sollen zur Erleichterung des Verständnisses beitragen.

Mit Rücksicht auf den Umfang des Buches ist auf die Brückenträger als Raumfachwerke, die ja auch für die Praxis von untergeordneter Bedeutung sind, nicht eingegangen. Aus gleichem Grund wurde von der Betrachtung statisch unbestimmter Systeme ganz abgesehen. Wenn man sich mit der Berechnungsweise der statisch bestimmten Raumfachwerke vertraut gemacht hat, bietet ja übrigens die Berechnung unbestimmter Systeme keine Schwierigkeiten mehr, erfolgt im wesentlichen schematisch (vgl. z. B. Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre usw., 3. Auflage, S. 319).

Zum Schluß ist es mir eine angenehme Pflicht, der Verlagsbuchhandlung meinen verbindlichsten Dank auszudrücken für die treffliche Ausführung des Druckes und der Abbildungen, nicht weniger für die Bereitwilligkeit, mit der sie auf mancherlei geäußerte Wünsche eingegangen ist.

Darmstadt, Dezember 1906.

W. Schlink.

Inhaltsübersicht.

Seite

Erster Abschnitt. Raumfachwerke im allgemeinen . 1—174

Erstes Kapitel. Ebene Fachwerke (als Einleitung). . . 1—52

§ 1. *Das kinematisch bestimmte oder stabile System* . . . . 1—13
1. Definition von kinematisch bestimmten Fachwerken 1
2. Der Begriff des statisch bestimmten Fachwerks . 2
3. Das 1. Bildungsgesetz mit seinem Ausnahmefall 3
4. Das 2. Bildungsgesetz mit seinem Ausnahmefall 6
5. Das Wesen der Stabvertauschung. Richtiger und falscher Ersatzstab. Der Fall der endlichen und unendlich kleinen Beweglichkeit 7
6. Das Hennebergsche, allgemeine Bildungs- und Reduktionsgesetz (spezielle Stabvertauschung) mit dem Grenzfall 11

§ 2. *Die statisch bestimmten Systeme* . . . . 14—21
7. Die Grundlage für die Spannungsermittlungen. Das 1. und 2. Bildungsgesetz, Ausnahmefälle . . 14
8. Das Hennebergsche Gesetz Hennebergscher Beweis, daß jedes statisch bestimmte System auch stabil ist 17

§ 3. *Föppls Beweis, daß jedes statisch bestimmte System auch stabil ist und umgekehrt* . . . . 21—30
9. Allgemeine Gleichungen. Die Determinantenbedingung für statische Bestimmtheit 21
10. Gleichungen der kinematischen Untersuchung. Der Zusammenhang der hierbei maßgebenden Determinante mit derjenigen unter 9; der Föpplsche Satz 24
11. Der Hennebergsche Zusatz zu Föppls Satz . . . 27

§ 4. *Die Spannungsbestimmungsmethode der Stabvertauschung oder des Ersatzstabs* . . . . 30—37
12. Die Spannungsberechnung nach Henneberg bei einfacher Stabvertauschung 30
13. Regeln zur Auffindung von Ersatzstäben nach Müller-Breslau 32

Seite

14. Entsprechende Regeln bei mehrfacher Stabvertauschung . . . 34
15. Anwendung auf ein spezielles Beispiel mit unterem starren Teil . . . 37

§ 5. *Fortsetzung. Menrfache Stabvertauschungen. Verwandte Methoden* . . . 38—43
16. Die Spannungsberechnung bei zwei- und mehrfacher Stabvertauschung . . . 38
17. Berechnung ohne Multiplikatoren . . . 40
18. Spannungsberechnung mittels Knotenpunktsbedingungen ohne Ersatzstäbe . . . 41

§ 6. *Kinematische Verfahren* . . . 43—48
19. Allgemeines über die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen (Mohr, Föppl, Müller-Breslau). Das Müller-Breslausche Verfahren mit Anwendung von lotrechten Geschwindigkeiten . . . 43
20. Die Untersuchung der Stabilität auf kinematischem Weg . . . 48

§ 7. *Gestützte ebene Systeme (Ebene Fachwerksträger)* . . . 48—52
21. Das erweiterte System. Der Zusammenhang zwischen Stützungsstäben und Lagerbedingungen . . . 48
22. Herstellung verschiedener Fachwerksträger. Die Mohrsche Formel . . . 50
23. Spannungsberechnung mittels erweiterten Systems . . . 51

Zweites Kapitel. Zerlegung einer Kraft in Richtungen im Raume . . . 53—83

§ 8. *Die Richtungslinien gehen durch einen Punkt. Graphische Verfahren* . . . 53—60
24. Die Lage der 3 Richtungslinien. Spezielle Lagen . . . 53
25. Ermittlung der Kräfte mittels der gewöhnlichen Zerlegung (Parallelepiped) . . . 54
26. Die Verfahren von Culmann und Müller-Breslau . . . 58

§ 9. *Fortsetzung. Analytische Verfahren. Allgemeines und Projektionsverfahren* . . . 60—68
27. Die Übertragung der Zeichnung in Rechnung . . . 60
28. Das Projektionsverfahren mit Beispiel . . . 61
29. Der Zusammenhang des Projektionsverfahrens mit den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen. Allgemeine Formeln . . . 65

§ 10. *Fortsetzung. Momenten- und Mohrsche Methode* . . . 68—76
30. Zusammenhang des Momenten- und Projektionsverfahrens. Momentenmethode bei verschiedener Lage der Stäbe . . . 68

Seite

31. Das Mohrsche Verfahren. Zusammenhang mit dem Projektionsverfahren 72
32. Spezielle Stabanordnung bei mehr als 3 Stäben: alle Stäbe liegen mit einer Ausnahme in derselben Ebene 76

§ 11. *Die Richtungslinien gehen nicht durch einen Punkt* . 76—83
33. Die Anzahl der Richtungslinien. Anwendung der Ritterschen Methode bei spezieller Lage der 6 Kraftlinien 76
34. Allgemeines Momentenverfahren: 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten (nach Föppl) 79
35. Der Ausnahmefall bei dieser Zerlegung 80
36. Spezielle Anordnung bei mehr als 6 Stäben: alle mit Ausnahme eines Stabes werden von derselben Linie getroffen 83

Drittes Kapitel. Bildungsweise und Berechnung der Raumfachwerke . . . . 83—143

§ 12. *Bildungsweise der freien Raumfachwerke* . . . . . . 83—91
37. Die zwei ersten Bildungsgesetze, Ausnahmefälle 83
38. Der Föppl-Hennebergsche Satz 86

§ 13. *Berechnung der Raumfachwerke. Drittes Bildungsgesetz* 91—98
39. Die Berechnung von Systemen nach den beiden ersten Bildungsgesetzen 91
40. Bildung und Reduktion der Raumfachwerke mittels der Stabvertauschung. Die Hennebergschen Gesetze 91
41. Die Regeln zur Auffindung von Ersatzstäben nach Müller-Breslau 93
42. Die Spannungsberechnung bei einfacher Stabvertauschung 96
43. System mit zweifacher Stabvertauschung . . . 97

§ 14. *Fortsetzung. Mehrfache Stabvertauschungen. Methode der Knotenpunktsbedingungen* . . . . 98—103
44. Allgemeine Spannungsberechnung bei mehrfacher Stabvertauschung 98
45. Spezielle Systeme, bei denen ein Teil für sich stabil ist 100
46. Berechnung ohne Multiplikatoren. Methode der Knotenpunktsbedingungen 101

§ 15. *Beispiel zu den Verfahren des vorigen Paragraphen (Zeltsystem)* . . . . 103—116
47. Die Berechnung der beiden zunächst willkürlichen Spannungen mittels der Knotenpunktsbedingungen 103

Seite

48. Die gleiche Berechnung mittels der Methode der Stabvertauschung (Ersatzstabverfahren) 109
49. Ermittlung aller Spannungen bei senkrechter Belastung. 112

§ 16. *Wichtiges Beispiel für 2 bezw. 4 störende Stäbe. Stabilitätsuntersuchungen* . . . . 117—126
50. Gang der Spannungsberechnung für das gegebene Beispiel (System der Zimmermann-Kuppel). . . 117
51. Verschiedene Verfahren für Stabilitätsuntersuchungen 119
52. Stabilitätsuntersuchung des Beispiels mittels der Stabvertauschung 120
53. Stabilitätsuntersuchung nach dem Föppl-Hennebergschen Satz 125

§ 17. *Methoden von Mohr und Müller-Breslau. Die Momentenmethode* . . . . 127—139
54. Die Mohrsche Methode der Knotenpunktsbedingungen 127
55. Allgemeines über kinematische Verfahren . . . 129
56. Das Wesen des Müller-Breslauschen Verfahrens 130
57. Die Anwendung desselben auf zusammengesetzte Raumfachwerke, sein Zusammenhang mit der Methode der Stabvertauschung 132
58. Das kinematische Verfahren von Mohr 135
59. Vergleich desselben mit demjenigen von Müller-Breslau 138
60. Das Wesen der Momentenmethode 139

§ 18. *Flechtwerke* . . . . 139—143
61. Der Begriff des einfachen (Föpplschen) Flechtwerks 139
62. Mehrfach-zusammenhängende Flechtwerke . . . 142

Viertes Kapitel. Gestützte Raumsysteme . . . . 143—174

§ 19. *Allgemeines. Das erweiterte System*. . . . . 143—149
63. Zusammenhang zwischen Stützungsstäben und Lagern. Fachwerksträger 143
64. Das erweiterte System 146
65. Die Berechnung mittels des erweiterten Systems 147

§ 20. *Verschiedene Möglichkeiten zur Herstellung von gestützten Raumsystemen. Stabilitätsfragen* . . . . 149—155
66. Die Herstellung nach dem 2. Bildungsgesetz. Stabvertauschungen. Mohrsche Formel 149
67. Beispiele für liegende Flechtwerke 150
68. Herstellung nach dem 1. Bildungsgesetz. Allgemeine Gesetze zur Herstellung eines Raumträgers 152

Seite

69. Stabilitätsuntersuchungen von gestützten Raumsystemen 154

§ 21. *Gerüstsysteme* . . . . 155—162

70. Gerüstsysteme auf 6 und 9 Stützungsstäben . . 155

71. Stabilitätsuntersuchung von in einer Ebene gelagerten Ringen 157
(vgl. hierzu Nr. 173 des Nachtrags)

72. Weiteres System mit 9 Stützungsstäben 160

73. n-seitige Systeme mit $2n$ Stützungsstäben . . . 161

§ 22. *Berechnung von Prismen-Gerüstsystemen* . . . . . . 162—169

74. Die Spannungsermittlung der Systemstäbe . . . 162

75. Ermittlung der Lagerreaktionen 165

§ 23. *Pfeilergerüste und Krangerüste* . . . . 170—174

76. Berechnung der Pfeilergerüste 170

77. Berechnung der Krangerüste 173

Zweiter Abschnitt. Dachfachwerke . . 175—367

78. *Einleitung.* Dachfachwerke im allgemeinen . . 175

Fünftes Kapitel. Die Schwedler-Kuppel . . . . 176—210

§ 24. *Die Form der Schwedler-Kuppel. Verschiedene Lagerungen* 176—187

79. Die Schwedler-Kuppel in festen Lagern 176

80. Ihre Stützung auf Rollenlagern (Müller-Breslau) 178

81. Kinematische Untersuchung bei speziellen Lagergleitrichtungen 179

82. Ein vierfach labiles System: kinematische Untersuchung 181

83. Untersuchung desselben auf statischem Weg. . 184

§ 25. *Berechnung nach Schwedler und allgemeines Verfahren* 187—193

84. Die Schwedlerschen Angaben. 187

85. Die Spannungsverhältnisse bei einer Einzellast (Zerlegungsmethode nach Föppl) 190

§ 26. *Berechnung der Schwedler-Kuppel bei beliebiger Belastung* 193—201

86. Ermittlung der Spannungen einer unter bestimmter Belastung stehenden Schwedler-Kuppel auf graphischem Wege 193

87. Berechnung nach Müller-Breslau 197

88. Die Gegendiagonalen; Vorteile der erwähnten Verfahren für deren Berechnung 198

§ 27. *Berechnung der Schwedler-Kuppel mittels der Momenten- und Projektionsmethode* . . . . 201—210

89. Berechnung der Ringspannungen des obersten Geschosses mittels der Momentenmethode (nach Landsberg) 201

Seite

90. Berechnung der Diagonalspannungen 204
91. Ermittlung der Gratstabspannungen 206
92. Anwendung des Projektionsverfahrens 207
93. Die Spannungen der unteren Geschosse. . . . 209
94. Ableitung einer Zimmermannschen Beziehung. 209

Sechstes Kapitel. Netzwerkkuppel und Zimmermann-Kuppel . . . . 210—239

§ 28. *Die Netzwerkkuppel* . . . . 210—220
95. Die Gestalt der Netzwerkkuppel 210
96. Stabile und labile Netzwerkkuppeln 211
97. Die Berechnung der Spannungen nach Föppl . 214
98. Verbindung von Netzwerk- und Schwedler-Kuppel 218

§ 29. *Die Zimmermannsche Kuppel. Analytische Berechnung* 220—230
99. Die wesentliche Form der Kuppel 220
100. Stabilitätsnachweis derselben 221
101. Berechnung von Zimmermann 223
102. Die Momentenmethode (nach Landsberg) . . . 223
103. Sonderfälle der Zimmermann Kuppel 229
104. Schwedler- und Netzwerkkuppel als Spezialformen der Zimmermannschen Kuppel 230

§ 30. *Zeichnerische Berechnung der Zimmermann-Kuppel. — Mehrgeschossige Systeme* . . . . 231—239
105. Allgemeine Verfahren der Stabvertauschung und Knotenpunktsbedingungen 231
106. Anwendung bei Wirkung einer Einzellast (nach Föppl) 232
107. Verschiedene Lagerungen der Zimmermann-Kuppel 236
108. Die mehrgeschossige Kuppel. 238

Siebentes Kapitel. Allgemeine Betrachtungen über räumliche Dachsysteme. Herstellung neuer Kuppeln (Scheibenkuppel). . . . . 239—268

§ 31. *Allgemeines über Kuppelsysteme* . . . . 239—245
109. Das erweiterte System; Stabvertauschungen. . 239
110. Das Kuppelflechtwerk; Stabilitätsfragen . . . 241
111. Anwendung auf die Schwedler-Kuppel 242
112. Anwendung auf die Lagerung weiterer Systeme 244

§ 32. *Allgemeine Formeln für die Zahl der Lagerbedingungen* 246—255
113. Allgemeine Formeln für stabile Lagerung eines einfachen Flechtwerksteils. 246
114. Verhältnisse, wenn der obere Ring mehr Ecken als der untere hat 248

Seite

115. Stabile Lagerung von geschlossenen Flechtwerksteilen 249
116. Anwendung der Formeln auf die bekannten Kuppeln 250
117. Stabile Lagerung eines Flechtwerksteils mit mehreren inneren Öffnungen 251
118. Beispiele hierzu 253

§ 33. *Die Herstellung neuer Kuppeln. Die Scheibenkuppel* . 255—260
119. Kuppel, aus der Ikosaederstruktur abgeleitet . 255
120. Die eingeschossige Scheibenkuppel 256
121. Nachweis der Stabilität für dieselbe 257

§ 34. *Mehrgeschossige Scheibenkuppeln* . . . . 260—268
122. Verschiedene Möglichkeiten zur Herstellung derselben 260
123. Stabilitätsbeweis für die mehrgeschossige Scheibenkuppel 262
124. Die Föpplschen Kuppeln mit Netzwerkfüllung 266
125. Die Vorteile der Scheibenkuppeln. Beispiele . 266

Achtes Kapitel. Die Berechnung der Scheibenkuppeln 268—350

§ 35. *Berechnung der eingeschossigen Kuppel. Diagonalspannungen* . . . . 268—279
126. Der Gang der Berechnung 268
127. Ausdrücke für die Diagonalspannungen bei regelmäßiger Kuppel 270
128. Formeln bei allgemeiner Belastung 274
129. Die Formeln für spezielle Belastungsfälle . . . 277

§ 36. *Fortsetzung. Die übrigen Stabkräfte. Methode zur graphischen Berechnung (nach Föppl)* . . . . 279—288
130. Formeln für die Spannungen der Oberringstäbe 279
131. Formeln für Gratstabkräfte 280
132. Ausdrücke für die Unterringspannungen . . . 281
133. Die Reaktionen der Kugellager 283
134. Die Reaktionen der Rollenlager 283
135. Graphische Ermittlung der Spannungen (nach Föppl) 285

§ 37. *Durchführung von Zahlenbeispielen für die einfache Scheibenkuppel* . . . . 288—300
136. Allgemeine Angaben 288
137. Die Wirkung der lotrechten Lasten 290
138. Die Diagonalspannungen infolge wagrechter Lasten 291
139. Die übrigen Stabspannungen 294
140. Die Größe der Auflagerreaktionen 298

Seite

§ 38. *Analytische Berechnung der mehrgeschossigen Scheibenkuppel* . . . . . 300—309
141. Allgemeine Angaben über die Spannungsermittlungen im obersten und zweitobersten Geschoß 300
142. Das drittoberste Geschoß 303
143. Das Stützengeschoß 304
144. Die Gleichungen für die Diagonalen des zweiten Geschosses 304

§ 39. *Graphische Berechnung der mehrgeschossigen Scheibenkuppel* . . . . . 309—314
145. Wirkende Last an einem Eckpunkt des zweiten Rings 309
146. Einzellast an einem Eckpunkt des ersten Rings 310
147. Kraft an einem Zwischenpunkt des zweiten Rings 311
148. Wirkung eines Lastensystems. Allgemeine Regel von Föppl zur Berechnung der Spannungen. . 313

§ 40. *Durchführung eines Zahlenbeispiels für die dreigeschossige Kuppel nach dem Momentenverfahren. Lotrechte Belastung* . . . . . 315—337
149. Die Maße der Kuppel. Wichtige vorkommende Werte 315
150. Die Größen der lotrechten Belastung. 320
151. Belastung durch ständige Lasten: die Stabspannungen im ersten Geschoß 322
152. Fortsetzung: die Stabkräfte des zweitobersten Geschosses 323
153. Fortsetzung: die Spannungen des drittobersten Geschosses 327
154. Fortsetzung: die Größen der Auflagerringkräfte und Auflagerreaktionen 332
155. Belastung mit Schnee 334
156. Belastung durch Menschengedränge 335

§ 41. *Fortsetzung. Belastung durch Windkräfte* . . . . . 337—350
157. Die Größe der wirkenden Lasten 337
158. Die Stabkräfte des obersten Geschosses. . . . 339
159. Die Spannungen im zweiten Geschoß. 340
160. Die Stabkräfte im drittobersten Geschoß . . . 344
161. Die Kräfte im Lagerring und Auflagerreaktionen 348

Neuntes Kapitel. Geschlossene Systeme. Dachfachwerke 351—367

§ 42. *Geschlossene Kuppeln* . . . . . 351—358
162. Die Lagerung von Zeltdächern und geschlossenen Kuppeln 351
163. Kuppeln mit Laternengeschoß 353

Seite

164. Berechnung der geschlossenen Kuppeln 355
165. Allgemeines über die Herstellung geschlossener Kuppeln 357

§ 43. *Räumliche Dachsysteme. Föppls Flechtwerksdächer* . . 358—367
166. Stabilitätsuntersuchungen der allgemeinen Dachfachwerke 358
167. Die Vorteile dieser Systeme 360
168. Ihre Berechnung 361
169. Föppls Flechtwerksdächer 361
170. Verschiedene Anordnung: Sägedächer 366
171. Abgeänderte Formen von Dachfachwerken . . 367

Nachtrag . . . . 368—378
172. Ergänzungen zum Beweis des Föppl-Henneberg-schen Satzes 368
173. Ergänzungen zu dem auf Rollenlagern gestützten Ring und zur Netzwerkkuppel 374

Literaturverzeichnis . . . . 379—384
Sachregister . . . . 385—390

Erster Abschnitt.

Raumfachwerke im allgemeinen.

Erstes Kapitel.

Ebene Fachwerke (als Einleitung).

§ 1. Das kinematisch bestimmte oder stabile System.

1. Unter Fachwerk möge ein System von starren oder elastischen Stäben verstanden werden, die an ihren Enden gelenkartig miteinander verbunden sind.[1]) Liegen alle diese Stäbe, bezw. ihre Achsen in derselben Ebene, so spricht man von einem ebenen Stabgebilde, anderenfalls von einem räumlichen Stabsystem. Bei den ebenen Gebilden hat man sich die einzelnen Stäbe durch zylindrische Bolzen verbunden zu denken, bei den Raumgebilden durch Kugelgelenke.[2])

Ein Fachwerk soll für technische Zwecke in irgend einer Weise als Tragkonstruktion dienen. Damit dies möglich ist, müssen bei Anwendung von starren Stäben die verschiedenen Punkte des Systems eine unverschiebliche Lage besitzen; dasselbe muß starr oder stabil sein. Manche Autoren fassen

[1]) Vgl. Müller-Breslau, Stat. d. Baukonstr., Leipzig 1887, S. 173. Der Begriff „starr" ist von Bedeutung, solange es sich um statisch bestimmte Systeme handelt; elastisch dagegen bei statisch unbestimmten Gebilden.

[2]) In praktischen Fällen werden meistens keine Gelenke verwendet, sondern die Stäbe durch Vernietung miteinander verbunden. Hierdurch entstehen Zusatzspannungen (Nebenspannungen), die zu den durch äußere Kräfte hervorgerufenen hinzutreten. Die Gelenke hat man sich natürlich reibungslos zu denken.

mit Rücksicht auf diese technische Forderung den Begriff des Fachwerks enger auf, wie oben angegeben, und verstehen darunter ein stabiles Stabgebilde.[1])

Es läßt sich erwarten, daß ein stabiles System eine Mindestzahl von Stäben besitzen muß; dieselbe beträgt für ebene Systeme, wie später gezeigt wird, bei n Knotenpunkten:

$$s = 2n - 3. \tag{1}$$

Die Gebilde mit weniger Stäben können nicht stabil sein, wohl aber solche mit mehr Stäben; erstere nennt man kinematisch unbestimmt, letztere kinematisch überbestimmt; diejenigen mit der angegebenen Zahl müssen nicht stabil sein, sind sie es, so werden sie als kinematisch bestimmt bezeichnet.[2]) Es ist einleuchtend, daß sich der Begriff „kinematisch bestimmt" deckt mit demjenigen der geometrischen Bestimmtheit, wenn an die Stelle der Stäbe die Linien treten.

2. Eine Tragkonstruktion hat den Zweck, bestimmte Lasten nach der Erde zu leiten. Es müssen demgemäß die Fachwerke der Erde gegenüber festgelegt werden; man erhält so die Fachwerksträger[3]) (gestützte Fachwerke), im Gegensatz zu den freien Fachwerken, die hier zuerst besprochen werden sollen. Die sämtlichen auf ein solches Stabsystem wirkenden Lasten müssen im Gleichgewicht stehen, da ja sonst dasselbe in Richtung der Resultante verschoben würde. Die Belastungen (äußere Kräfte) suchen nun das Fachwerk zu deformieren, und es entstehen hierdurch in den einzelnen Stäben gewisse Gegenkräfte (innere Kräfte oder Spannungen). Wird vorausgesetzt, daß die Lasten nur in den Knotenpunkten angreifen, dann entsteht in den einzelnen Stäben nur Zug oder Druck. Da nun der Querschnitt der Stäbe von den Spannungen abhängt, dieser aber für sichere Konstruktionen eindeutige und

[1]) Föppl, Theorie d. Fachw., Leipzig 1880. — Vgl. auch Enzykl. d. math. Wissensch. IV, 5. Henneberg, D. graph. Statik, S. 387.

[2]) Enzykl. d. math. Wissensch. IV, 5. Henneberg, D. graph. Statik, Leipzig, S. 387—389.

[3]) Mohr definiert das Fachwerk bereits als Fachwerksträger. Ztschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hann. 1874 u. 1875.

endliche Größe bei einer beliebigen Belastung erfordert, so kann man ausdrücken: Damit ein Stabsystem sicher ist, ist es unbedingt erforderlich, daß bei irgend welcher Belastung in keinem Stab eine vieldeutige oder unendlich große Spannung auftritt. Diese Forderung ist nur bei einer bestimmten Anzahl von Stäben erfüllt, und zwar sind wiederum bei n Knotenpunkten $(2n-3)$ Stäbe notwendig (vgl. § 3). Besitzt das System eine kleinere Anzahl von Stäben, so kann es für beliebige Last nicht mehr sicher sein wohl aber für eine spezielle Belastung; hat es gerade die angegebene (richtige) Zahl, so ist es im allgemeinen sicher für beliebige Lasten, und besitzt schließlich das System eine größere Anzahl von Stäben, so treten bei starren Stäben vieldeutige Spannungen auf. Wohl werden in der Praxis derartige Systeme öfters ausgeführt; zu ihrer Berechnung wird aber auf die Elastizität der Stäbe Rücksicht genommen. Mit Einführung der Elastizitätstheorie ergeben sich alsdann im allgemeinen bei irgend einer Belastung eindeutige Werte in den verschiedenen Stäben. Ein System mit der richtigen Anzahl von Stäben, in dem bei jeder beliebigen Belastung nur eindeutige und endliche Spannungen auftreten, wird statisch bestimmt genannt, ein solches mit mehr Stäben heißt gewöhnlich statisch unbestimmt.[1])

Scheinbar ist nach diesen Ausführungen jedes Fachwerk bezgl. zweier Anforderungen zu betrachten: 1. ob es stabil und 2. ob es gegenüber den Kräften bestimmt und sicher ist. Doch gestaltet sich die Untersuchung tatsächlich einfacher, da man allgemein zeigen kann, daß jedes kinematisch bestimmte System auch statisch bestimmt ist.

3. Es möge zunächst die Frage erledigt werden, wie man starre ebene Fachwerke herstellen kann.[2]) Diese Untersuchung

---

[1]) Mohr bezeichnet die statisch bestimmten Systeme als einfache, die unbestimmten als zusammengesetzte. Ztschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hann. 1874. — Abhdlgn. a. d. Geb. d. techn. Mech., Berlin 1906, S. 343.

[2]) Die zwei im folgenden zuerst erwähnten Bildungsgesetze sind wesentlich älter als das dritte. Vgl. für die ersteren: Enzykl. d. math. Wissensch. IV,5 (Henneberg), S. 401. — Föppl, Theorie d. Fachwerks. — Henneberg, Statik d. starren Systeme, Darmstadt 1886, usw.

läßt sich rein geometrisch durchführen, indem man nachsieht, unter welchen Umständen das ganze System, also die Lage der einzelnen Punkte, durch die Größe der Strecken (die hierbei an die Stelle der starren Stäbe zu treten haben) bestimmt ist. Das einfachstmögliche starre Stabsystem ist ein einzelner Stab. Ein weiterer Punkt kann gegenüber diesem Stabe festgelegt werden durch zwei Stäbe, die von den beiden Endpunkten ausgehen. Das so erhaltene Dreieck ist geometrisch und natürlich auch kinematisch bestimmt: Wäre C (Abb. 1) nur durch den Stab CA angefügt, so könnte sich C bei Voraussetzung der reibungslosen Gelenke auf einem Kreisbogen um A bewegen; ebenso würde er sich bei Vorhandensein des Stabes BC allein auf einem Kreisbogen um B drehen können. Infolge des Anschlusses beider Stäbe kann er sich nur gleichzeitig auf beiden Kreisbogen bewegen, d. h. er liegt fest, da zwei sich schneidende Kreisbogen an der betreffenden Stelle nur einen Punkt gemeinsam haben.

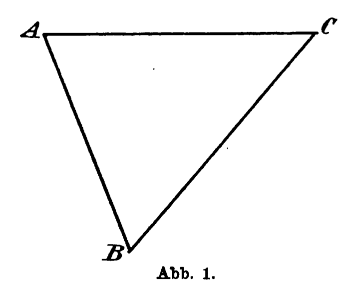


Abb. 1.

An das Dreieck kann nun wiederum ein Punkt durch zwei Stäbe angefügt und dann weiter immer je ein Punkt durch zwei Stäbe festgelegt werden (Abb. 2),[1] wodurch ein bestimmtes Bildungsgesetz für die stabilen Fachwerke erhalten wird. Man erkennt sofort, daß ein Ausnahmefall vorliegt, d. h. daß kein starres System entsteht, wenn ein Punkt durch zwei in derselben Linie liegende Stäbe angeschlossen ist. Der Punkt P in

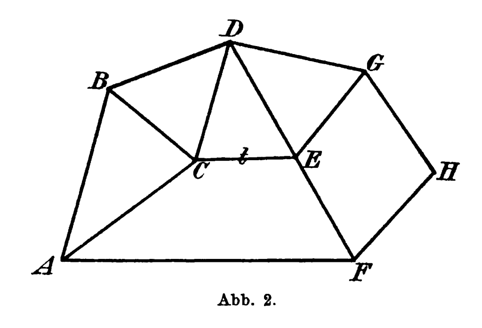


Abb. 2.

[1]) Wirkliche Knotenpunkte sind in den weiteren Abbildungen durch Buchstaben bezeichnet.

Abb. 3 z. B. wäre festgelegt durch die Berührungsstelle der beiden um F und G geschlagenen Kreise, dieselbe drückt aber keinen bestimmten Punkt aus. Kinematisch gedeutet, wäre bei starren Stäben eine unendlich kleine Verschiebung des Punktes P möglich.[1])

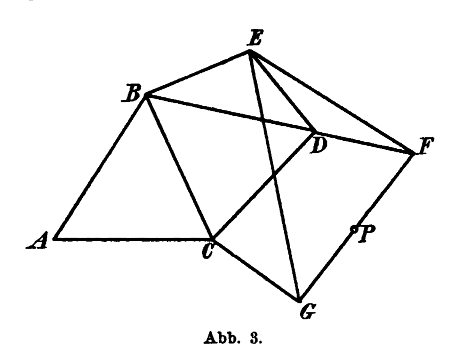


Abb. 3.

Das erste Bildungsgesetz zur Herstellung eines stabilen und kinematisch bestimmten Fachwerks ist also dadurch gegeben, daß man ausgehend von einem Stab je einen Punkt durch zwei Stäbe anschließt, die aber nicht in dieselbe Richtung fallen dürfen.

Demgemäß ist auch das System der Abb. 4 nicht mehr stabil; denn wohl sind an den Stab AB fest angefügt die Punkte C, D, E, dann aber F nicht mehr, und folglich auch nicht die Punkte G, H. Letztere wären wohl fest angeschlossen, wenn Punkt F unverschiebliche Lage hätte, da dies aber nicht der Fall, haben auch sie keine solche. Also obwohl das System Abb. 4 gegenüber Abb. 2 nur den kleinen Unterschied aufweist, daß an Stelle des Stabes t der Stab e eingeführt ist, ist es nicht mehr stabil.

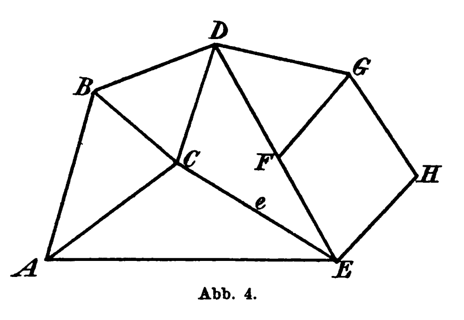


Abb. 4.

[1]) Da die in der Praxis zur Verwendung kommenden Stäbe nicht absolut starr sind, können sie eine kleine Längenänderung ertragen, wobei der durch zwei Stäbe in gleicher Richtung angefügte Punkt P (Abb. 3) einen kleinen Weg beschreibt, so daß dann P nicht mehr durch zwei Stäbe in genau derselben Richtung angeschlossen ist.

Die Frage nach der Stabanzahl eines solchen Systems ist leicht zu beantworten. Ausgehend vom Anfangsstab AB sind zum Anschluß der verschiedenen, im ganzen n_2 Punkte: $2n_2$ Stäbe notwendig.

Der Ausgangsstab selbst besitzt $n_1 = 2$ Knotenpunkte; für ihn ist also nicht $s_1 = 2n_1$, sondern

$$s_1 = 1 = 2 \cdot 2 - 3 = 2n_1 - 3.$$

Die Gesamtzahl der Stäbe ist demgemäß:

$$s_1 + s_2 = 2(n_1 + n_2) - 3,$$

oder wenn die Gesamtzahl der Stäbe mit s, diejenige der Knotenpunkte mit n bezeichnet wird:

$$s = 2n - 3.$$

Zur Herstellung eines starren ebenen Stabsystems mittels dieses ersten Bildungsgesetzes sind hiernach $(2n - 3)$ Stäbe erforderlich.

4. Eine weitere Bildungsweise entsteht dadurch, daß man zwei vorliegende, sicher stabile Fachwerke zu einem einzigen vereinigt. Hierzu sind drei Stäbe nötig. Würden nur zwei Stäbe DM und EP eingezogen (Abb. 5), so könnte sich das Gebilde II gegenüber I bewegen mit dem Schnittpunkt von DM und EP als Pol; aber diese Bewegungsfähigkeit wird aufgehoben durch einen weiteren Verbindungsstab FQ. Man erkennt daraus sofort, daß die drei Stäbe sich nicht in einem Punkte schneiden dürfen, da alsdann die Bewegungsmöglichkeit noch vorhanden wäre; sie dürfen demgemäß auch nicht parallel laufen. Also das zweite Bildungsgesetz ist ausgedrückt durch den Satz:

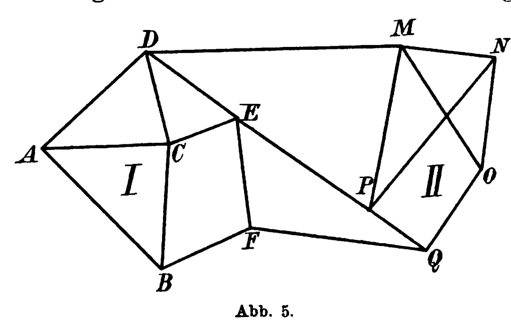


Abb. 5.

Ein stabiles System wird dadurch gewonnen, daß man zwei sicher stabile Gebilde durch drei Stäbe

miteinander verbindet, die sich nicht schneiden. War eines der Ausgangssysteme labil, so ist auch das ganze System labil.

Ein neues System kann man auch dadurch erhalten, daß man einen Punkt, etwa P, von II mit einem solchen, etwa C, von I direkt zusammenfallen läßt, beide also durch einen gemeinsamen Bolzen verbindet (Abb. 6), und außerdem noch einen Stab einzieht. Der gemeinsame Punkt tritt jetzt an die Stelle von zwei Verbindungsstäben, und der weitere Stab hebt die Drehungsfähigkeit des Systems auf.

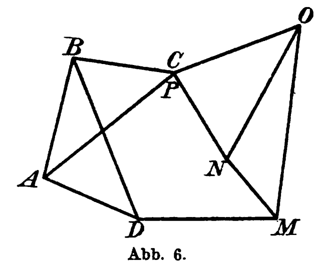


Abb. 6.

Ein Fachwerk nach dem zweiten Bildungsgesetz besitzt ebenfalls die unter Gl. 1 angegebene Stabzahl. Denn der Teil I hat:

$$s_1 = 2n_1 - 3 \quad \text{Stäbe,}$$

Teil II:

$$s_2 = 2n_2 - 3.$$

Zur Verbindung dienen noch drei Stäbe, sodaß man im ganzen hat:

$$s_1 + s_2 = 2n_1 - 3 + 2n_2 - 3 + 3 = 2(n_1 + n_2) - 3,$$
$$s = 2n - 3.$$

5. Nun gibt es viele Fachwerke, von denen man kinematische Bestimmtheit nachweisen kann, die nicht nach einem dieser Bildungsgesetze hergestellt sind. Sie alle müssen, wie in § 3 gezeigt wird, die Stabanzahl $s = 2n - 3$ besitzen.[1]) Wie kann man sich solche Systeme entstanden denken? Ein Mittel hierfür bietet die Stabvertauschung.[2]) In einem sicher

[1]) Fachwerke, nach dem ersten Bildungsgesetz hergestellt, nennt Föppl: einfache; die nun zu betrachtenden dagegen: zusammengesetzte.

[2]) Vgl. z. B. Föppl, D. graph. Statik (Techn. Mechanik, Bd. II), Leipzig 1903, 2. Aufl., S. 196. — Müller-Breslau, Statik d. Baukonstruktionen, 3. Aufl., Leipzig 1901, Bd. I, S. 443.

kinematisch bestimmten System (Abb. 7) möge irgend ein Stab AB (Tauschstab) fortgenommen werden; dann ist das übrig bleibende System mit $(s-1)$ Stäben nicht mehr stabil. Unter Einwirkung äußerer Kräfte vollführt es eine Bewegung, jeder Punkt beschreibt eine ganz bestimmte Kurve, wenn man einen Stab des Gebildes festhält; es ist eine zwangläufige Kette entstanden. Nach Entfernung des Stabes AB in Abb. 7 beschreibt z. B. Punkt F beim Festhalten von CB die in Abb. 8 angegebene Kurve. Während der Bewegung eines solchen verschieblichen Systems werden im allgemeinen zwei nicht verbundene Punkte, etwa C und F (Abb. 8), ihre Entfernung ständig verändern. Fügt man zwischen zwei solchen Punkten einen Stab ein, so ist

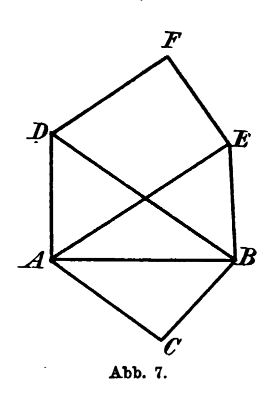


Abb. 7.

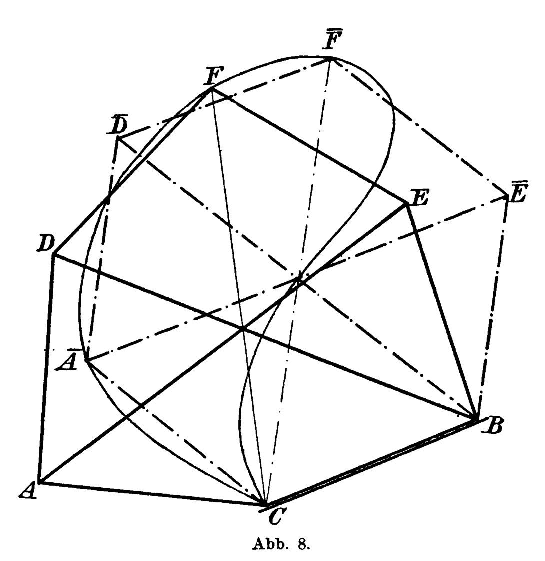


Abb. 8.

dadurch die Verschiebung dieser beiden Punkte gegeneinander verhindert, und damit die Bewegungsfähigkeit des ganzen

Systems aufgehoben, infolgedessen ergibt sich wiederum ein stabiles System (die ausgezogene Figur in Abb. 8). Es kann also hiernach mittels Stabvertauschung ein stabiles System in ein anderes verwandelt werden. Würde jedoch der neue Stab, Ersatzstab, zwischen zwei solche Knotenpunkte eingezogen, die bei der Bewegung ihre Entfernung nicht ändern, so würde die Verschieblichkeit nicht gehindert, das System wäre also trotz des Ersatzstabes labil. Wird z. B. in Abb. 9 der Stab CQ (Tauschstab) entfernt, so ändern die Punkte des Teiles I untereinander nicht ihre Entfernungen, ebensowenig

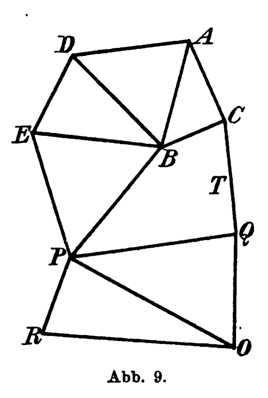


Abb. 9.

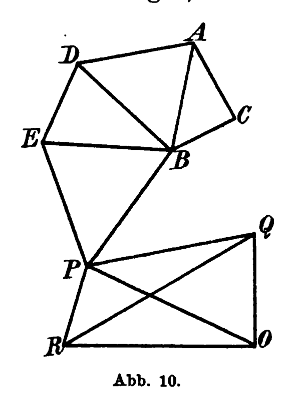


Abb. 10.

diejenigen des Teiles II, demgemäß hat ein Ersatzstab, der nur Punkte des Teiles I oder nur solche des Teiles II verbindet, keinen Wert; so würde der Stab RQ (Abb. 10) die Beweglichkeit durchaus nicht aufheben, das System könnte, obwohl es $(2n-3)$ Stäbe besitzt, noch endliche Bewegungen ausführen. Es liegt also bei den hier vorgenommenen Stabvertauschungen ein falscher Ersatzstab vor.

Noch ein anderer Fall eines falschen Ersatzstabes ist zu erwähnen, der wiederum am System der Abb. 8 erläutert werden möge, bei dem die Stäbe AC, BC, ... gleiche Länge besitzen. Der Punkt F beschreibt gegenüber dem festen Punkt C eine Kurve, die Entfernung FC ändert sich von Stelle zu Stelle. Es wird nun im allgemeinen für F auch solche Lagen geben, in denen FC gerade einen maximalen oder mini-

malen Wert annimmt, der durch die Bewegungsmöglichkeit des Systems, also durch die anderen Stäbe, bedingt ist. Wird nun der Stab FC als Ersatzstab gerade in einer solchen Lage des Systems eingezogen, daß die Entfernung FC ein Maximum $\bar{F}\bar{C}$ oder Minimum erreicht, so ist damit die Verschieblichkeit nicht vollständig aufgehoben, es ist noch eine unendlich kleine Bewegung möglich. Im vorliegenden Beispiel gibt System $\bar{A}$, $\bar{B}\cdots$ die Anordnung für maximales CF an, dasselbe ist also nicht stabil, erlaubt kleine Beweglichkeit. Man erkennt, daß das so erhaltene Sechseck regelmäßige Gestalt besitzt, und hat damit gefunden, daß ein regelmäßiges Sechseck, in das die drei durchgehenden Diagonalen eingezogen sind, kein stabiles Fachwerk darstellt trotz der richtigen Stabzahl.[1])

Aus diesen Ausführungen ergibt sich eine weitere Bildungsmöglichkeit für ebene Fachwerke:

Ein stabiles System kann mittels Stabvertauschung in ein anderes stabiles System übergeführt werden, wobei aber der Ersatzstab zwischen zwei solchen Punkten einzuziehen ist, die sich nach Fortnahme des Tauschstabes gegeneinander bewegen, und deren Entfernung nicht gerade den maximalen oder minimalen Wert besitzt, wie er durch die anderen Stäbe bedingt wird.

Mit Hilfe dieser Stabvertauschung können die verschiedensten Fachwerke hergeleitet werden, indem man ja eine solche beliebig oft ausführen, also auch mehrmalige Stabvertauschungen vornehmen kann. Da sich bei der Stabvertauschung die Anzahl der Stäbe nicht ändert, so besitzen alle derartigen Systeme $(2n-3)$ Stäbe.

Welche Stäbe richtige Ersatzstäbe sind, d. h. ein sicher stabiles System wiederum in ein stabiles überführen, läßt sich ohne weiteres nicht angeben; doch wird man bei einiger Übung vielfach leicht erkennen können, welche Fälle man zu vermeiden hat. Vorsicht ist jedenfalls geboten, wie Abb. 4 in Verbindung mit Abb. 2 zeigt; erstere kann ja aus dem sicher stabilen Gebilde

[1]) Zuerst wurde auf derartigen Grenzfall von Mohr hingewiesen. Ziviling. 1885, S. 289.

der Abb. 2 dadurch abgeleitet werden, daß Stab t entfernt und dafür e eingezogen wird.

6. Der erste, der darauf hinwies, daß durch Stabentfernung und entsprechende Stabzufügung alle möglichen Fachwerke abgeleitet werden können, der also das allgemeinste Bildungsgesetz aufstellte, war Henneberg.[1]) Er führte allerdings nicht diese allgemeine Stabvertauschung ein, sondern legte sein Bildungsgesetz in spezieller Weise fest, um möglichst sicher bei der Wahl des Ersatzstabes vorzugehen. Zur Gewinnung eines neuen Systems geht er von einem sicher stabilen Fachwerk aus, z. B.

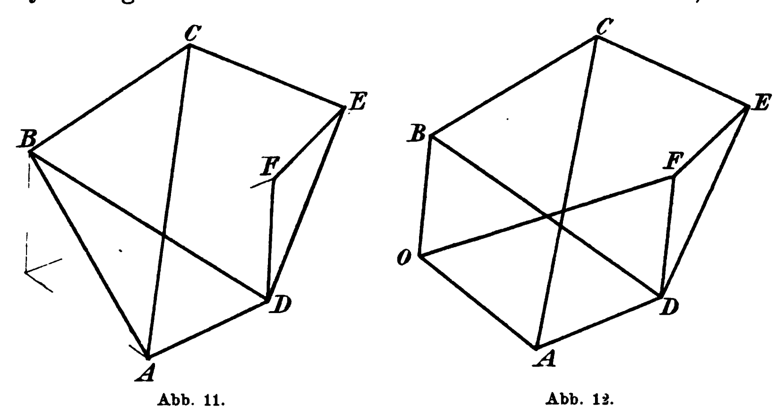


Abb. 11. Abb. 12.

A, B, C, D, E, F (Abb. 11), nimmt einen beliebigen Stab, etwa AB, fort und erhält damit ein bewegliches System. Um nun dieses wiederum starr zu gestalten, fügt er einen weiteren Knotenpunkt O mittels dreier Stäbe (Abb. 12) zu, von denen zwei nach den Endpunkten des fortgenommenen Stabes AB laufen. Das so gewonnene System besitzt jetzt wiederum $(2n - 3)$ Stäbe und ist nach einem Beweis von Henneberg immer stabil, wenn die vier Punkte A, B, F, O nicht auf einem bestimmten Kegelschnitt enthalten sind; anderenfalls liegt der erwähnte Grenzfall der kleinen Beweglichkeit vor. Man erkennt den engen Zusammenhang zwischen dem Hennebergschen dritten und dem oben erwähnten ersten Bildungsgesetz. Wie man mit Hilfe des

[1]) Henneberg, Statik d. starren Systeme, Darmstadt 1886, S. 213 ff.

letzteren von einem Fachwerk mit n Knotenpunkten zu einem solchen mit $(n+1)$ Knotenpunkten übergehen kann, so kann dies auch nach dem Hennebergschen Bildungsgesetz geschehen, indem man an das System mit n Knotenpunkten einen weiteren Punkt durch drei Stäbe, die etwa von A, B, F auslaufen, anschließt und dafür einen Stab zwischen zweien der Punkte A, B, F fortnimmt. Man gewinnt damit ein klares, allgemeines Bildungsgesetz und erhält so Fachwerke, die häufig überhaupt keinen zweifachen Knotenpunkt[1]) mehr enthalten, indem ja in dem letzten Punkt drei Stäbe zusammentreffen.

Umgekehrt kann immer von einem beliebigen Fachwerk mit n Knotenpunkten und der richtigen Anzahl von Stäben zu einem solchen mit $(n-1)$ Punkten übergegangen werden, indem jedes derartige Fachwerk, das keinen zweifachen Knotenpunkt aufweist, mindestens einen solchen besitzt, von dem nur drei Stäbe ausgehen. Um dies einzusehen, bedenke man, daß die Summe aller Stäbe, die von Knotenpunkten auslaufen, gegeben ist durch $2 \cdot (2n-3)$, da ja jeder Stab doppelt zu zählen. Die durchschnittliche Zahl der in einem Knoten zusammentreffenden Stäbe ist demgemäß

$$\frac{4n-6}{n} = 4 - \frac{6}{n},$$

aus welcher Zahl folgt, daß es bei jedem Fachwerk mit $2n-3$ Stäben mindestens **einen** Knotenpunkt geben muß, von dem nur zwei oder drei Stäbe auslaufen,[2]) daß dagegen in anderen Punkten, solange $n > 6$ ist, mehr als drei Stäbe zusammentreffen werden. Den dreifachen Knotenpunkt mit den Stäben OA, OB, OF (Abb. 12) kann man wegnehmen, erhält so ein verschiebliches System mit einem Stab zu wenig, das aber dadurch in ein stabiles übergeführt werden kann, daß man zwischen zweien der Punkte A, B, F, die sich gegeneinander

[1]) Unter n-fachem Knotenpunkt ist hier ein solcher verstanden, in dem n Stäbe zusammentreffen. Vgl. hierzu: Enzykl. d. m. W. IV, 5, S. 401. — In der Enzykl. wird statt Bildungsgesetz das Wort Strukturgesetz angewendet.

[2]) Henneberg, Statik d. st. S.

verschieben, einen neuen Stab einzieht. Das so entstandene Fachwerk besitzt kleine Beweglichkeit, wenn die vier Punkte A, B, F, O auf dem erwähnten Kegelschnitt liegen.

Das Wesentliche bei diesem Bildungsgesetz ist immer, wie Henneberg ausdrücklich betont, daß durch Fortnahme des Stabes bezw. des Knotenpunktes ein bewegliches System entsteht, und daß diese Bewegung durch Zufügung des Knotenpunktes bezw. des Stabes aufgehoben werden muß.[1]) Nun ist es aber ganz einerlei, ob man sagt: der Punkt O (Abb. 12) wird fortgenommen, dafür ein neuer Stab AB eingefügt, oder ob man sich ausdrückt: einer der nach O laufenden Stäbe, z. B. OF, wird entfernt, an seiner Stelle AB eingezogen. Letzterwähnte Auffassung liefert eine reine Stabvertauschung, und in Verfolgung dieses Gedankens kommt man dazu, statt des speziell gewählten Stabes AB irgend einen beliebigen anderen einzuführen, der die entstandene Beweglichkeit aufhebt, und gelangt so zur allgemeinen Stabvertauschung.

Vom mathematischen Standpunkt aus ist es ohne weiteres klar, daß die durch Fortnahme eines Stabes entstandene Beweglichkeit durch Hinzufügung eines anderen Stabes in verschiedener Weise aufgehoben werden kann; daß Henneberg sein Bildungsgesetz so speziell faßte, liegt lediglich daran, daß er eine Regel angeben wollte, mit Hilfe deren man allgemein von einem Fachwerk mit n Knotenpunkten und der richtigen Stabzahl zu einem solchen mit $n + 1$ übergehen kann und umgekehrt; und dieses Bildungsgesetz erscheint auch klarer und präziser als das der allgemeinen Stabvertauschung. Für praktische Fälle bietet (bei Berechnungen) die reine Stabvertauschung allerdings vielfach Vorteile dar; dies hat Müller-Breslau, der hervorragende praktische Rechenmeister, erkannt, ist darum diesen Schritt weiter gegangen und hat die Methode als das „Ersatzstabverfahren“ in die Praxis zur Weiterverbreitung eingeführt.[2])

[1]) Vgl. hierzu noch: Zentralbl. d. Bauverw. 1903, S. 378.

[2]) Vgl. hierzu Zentralbl. d. Bauverwaltung 1903; Ztschr. f. Arch. u. Ingenieurw. 1903, worin Abhandlungen von Mohr, Müller-Breslau, Henneberg; sowie Föppl, D. graph. Statik, 2. Aufl., Leipzig 1903, S. 318.

§ 2. Die statisch bestimmten Systeme.

7. Nach den Anfangsbemerkungen von § 1 ist bei einem Fachwerk nicht nur nachzusehen, ob es kinematisch bestimmt, sondern auch, ob es statisch bestimmt ist. Es möge nun in diesem Paragraphen vorgeführt werden, daß die nach § 1 gebildeten stabilen Systeme auch statisch bestimmt sind, d. h. die geringste für die Sicherheit notwendige Stabzahl besitzen und bei irgend einer Belastung in keinem Stab eine vieldeutige oder unendlich große Spannung erhalten.

Die Grundlage für die Spannungsermittelung bildet folgender der Erfahrung entnommener Satz:

Stehen die an irgend einem Körper, z. B. einem Fachwerk, wirkenden Kräfte im Gleichgewicht, so bilden auch die an einem durch irgend einen Schnitt losgelösten Teil des Körpers tätigen Kräfte ein Gleichgewichtssystem, wobei als Kräfte die an dem betreffenden Teil angreifenden äußeren Kräfte, sowie die in der Schnittfläche wirkenden inneren Kräfte, also beim Fachwerk die Spannungen der durchschnittenen Stäbe, einzuführen sind.

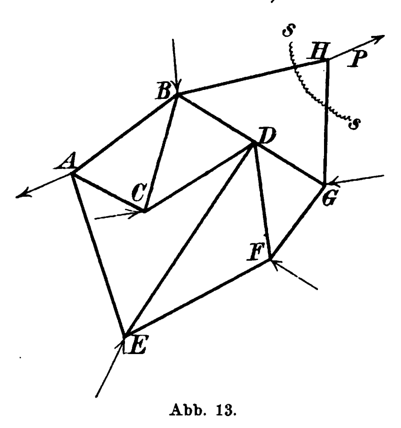


Abb. 13.

Das in Abb. 13 gezeichnete System ist nach dem ersten Bildungsgesetz hergestellt: Je ein Knotenpunkt ist durch zwei Stäbe angeschlossen. Nun kann man, ausgehend von dem Knotenpunkt (H), an dem nur zwei Stäbe zusammentreffen, denselben mittels des Schnittes *ss* lostrennen und die Spannungen beider Stäbe aus der Bedingung bestimmen, daß sie mit der Kraft P Gleichgewicht halten. Übergehend zum nächsten Knotenpunkt (G), an dem nur noch zwei unbekannte Spannungen vorhanden sind, können

diese ermittelt werden, hierauf nacheinander die bei F, E, D, C einlaufenden noch unbekannten Stabspannungen.[1])

Es bleiben noch übrig die Knotenpunkte B, A mit dem einzigen Stabe BA; es wäre also an B nur noch eine unbekannte Spannung, an A keine mehr vorhanden. Hiernach treten im ganzen drei unbekannte Stabspannungen weniger als wie $2n$ auf, also nur $(2n-3)$. Nun bietet aber doch jeder Knotenpunkt zwei Gleichungen, so daß scheinbar $2n$ Gleichungen den $(2n-3)$ Unbekannten gegenüberstehen. Dieser scheinbare Widerspruch klärt sich jedoch sofort auf, wenn man bedenkt, daß die äußeren Kräfte nicht beliebig wirken können, sondern unter sich im Gleichgewicht stehen müssen. Damit dieses der Fall, können sie nicht ganz willkürlich gewählt werden, sie müssen vielmehr drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllen (z. B.: Summe der Horizontal-Komponenten, Vertikal-Komponenten und Momente muß verschwinden). Demgemäß geben die Knotenpunkte nicht mehr $2n$ voneinander unabhängige Gleichungen an, sondern nur noch deren $(2n-3)$. Da nun für den Fall eines statisch bestimmten Systems nicht mehr Unbekannte als Gleichungen auftreten dürfen, so ist hiermit allgemein bewiesen, daß jedes statisch bestimmte ebene Fachwerk $(2n-3)$ Stäbe haben muß und nur so viel haben darf. Hat es mehr Stäbe, so stehen den $(2n-3)$ Gleichungen mehr Unbekannte gegenüber, also ist die Lösung nicht mehr eindeutig, sofern man nur mit starren Stäben rechnet.

Bei der allmählichen Spannungsbestimmung eines nach dem ersten Bildungsgesetz aufgebauten stabilen Fachwerkes kommt man demgemäß schließlich für die beiden letzten Knotenpunkte zusammen nur noch auf eine Gleichgewichtsbedingung, bei allen anderen dagegen hat man deren zwei zur Verfügung.

Solange die einzelnen Punkte durch zwei Stäbe mit verschiedener Richtung angeschlossen sind, ist die Spannungsermittelung eindeutig, und jeder Stab erhält endliche Spannungen.

---

[1]) Über diese „Polygonalmethode“ vgl. Enzykl. d. math. Wissensch. IV, 5, S. 395.

Ist dagegen ein Punkt M durch zwei Stäbe in derselben Richtung angefügt (Abb. 14), so liefert die reintheoretische Betrachtung an diesem Punkte vieldeutige Spannungen in MC und MD, sofern P in die Richtung der Stäbe fällt, und unendlich große Spannungen, wenn P andere Richtung besitzt. Da nun tatsächlich der Punkt M infolge der nicht absolut starren Stäbe etwas aus der Linie heraustritt, so treten in MC und MD bestimmte, aber sehr große Spannungen auf, weshalb das System doch als unbrauchbar zu bezeichnen ist.

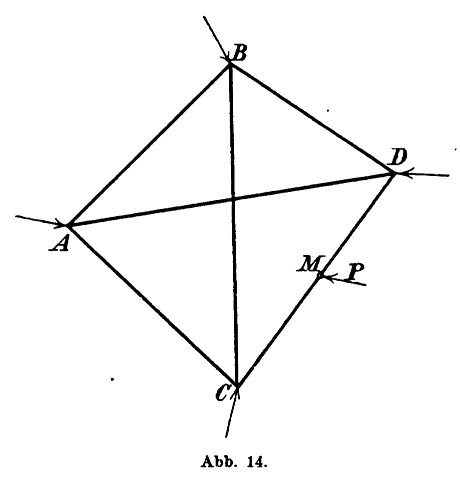


Abb. 14.

Es ist weiter das zweite Bildungsgesetz zu betrachten, wonach ein neues Fachwerk dadurch entsteht, daß zwei bestimmte Systeme durch drei Stäbe verbunden werden (Abb. 15). Es können zunächst die Spannungen in diesen drei Stäben ermittelt werden, indem man den Schnitt ss legt, der diese drei Stäbe trifft: dann muß die Resultante aller äußeren Kräfte auf der einen Seite vom Schnitt im Gleichgewicht stehen mit diesen drei Spannungen, wodurch dieselben eindeutig bestimmt sind,[1]) sofern sie nicht durch einen Punkt gehen. In letzterem Fall hätte ja die Resultante Gleichgewicht zu halten

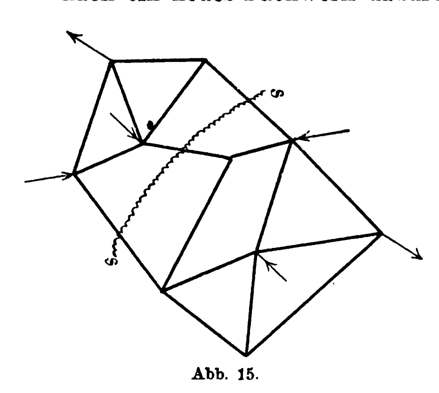


Abb. 15.

[1]) Diese „Schnittmethode" rührt von A. Ritter (Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen, Hannover 1863) und C. Culmann her (D. graph. Statik, S. 362).

mit drei durch einen Punkt laufenden Kräften, eine Forderung, die kein bestimmtes Resultat liefert. Es müßte dann für den Schnittpunkt der drei Stäbe das Moment der Resultante aller Kräfte auf der einen Seite des Schnittes gleich 0 sein, also

$$R \cdot r = 0,$$

eine Gleichung, die keinen Sinn hat, solange weder R noch r die Größe 0 besitzen. In dem zufälligen speziellen Belastungsfall, daß R durch den Schnittpunkt hindurchgeht, also $r = 0$ ist, wäre eine am Schnittpunkt von drei Linien angreifende Kraft in diese zu zerlegen, eine Aufgabe, die unendlich viele Lösungen zuläßt. Ebenso liefert der Sonderfall $R = 0$ in den drei Stäben vieldeutige Spannungen. Aber selbst wenn man auch bei diesen letzteren Belastungsfällen eindeutige Spannungen erhalten würde, wäre das System doch nicht zu gebrauchen, da es für jede Belastung statisch sicher sein muß.

8. Die beiden betrachteten Bildungsgesetze stimmen also für Herstellung von kinematisch und statisch bestimmten Fachwerken überein. Es ist schließlich noch die dritte Bildungsmöglichkeit, die Stabvertauschung, ins Auge zu fassen und zu zeigen, daß ein nach diesem Verfahren gewonnenes kinematisch bestimmtes Fachwerk auch statisch bestimmt ist. In Abb. 16 ist ein solches System gezeichnet, dessen Spannungen nicht nach den erwähnten einfachen Verfahren ermittelt werden können. Man kann dasselbe durch Stabvertauschung in ein solches verwandeln, das nach einfachem Bildungsgesetz aufgebaut, also sicher statisch bestimmt ist, indem z. B. nach dem eigentlichen Hennebergschen Verfahren der Knotenpunkt O entfernt, dafür der Stab PR eingezogen wird (Abb. 17 und 18). Genau dieselben Verhältnisse würden erhalten, wenn man ein-

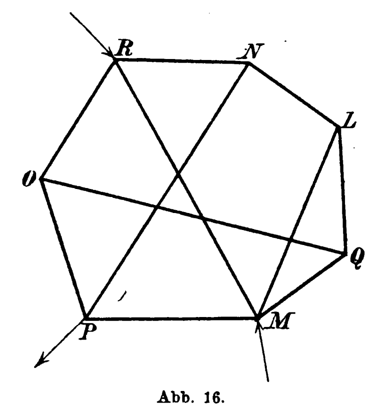


Abb. 16.

fach einen der von O auslaufenden Stäbe, etwa OQ, fortnimmt, dafür den Stab PR einzieht.

Die Berechnung der Spannungen im wirklich gegebenen System hat nun — wie Henneberg angab[1]) — folgendermaßen zu geschehen:

1. Man ermittelt die Spannungen in dem reduzierten Fachwerk, an dem der Knotenpunkt O mit seinen drei Stäben, bezw. der Stab OQ allein fehlt, für den Fall, daß nur die äußeren Kräfte wirken (Abb. 17). Die Spannung des i. Stabes möge mit ${}_0S_i$, diejenige des Ersatzstabes PR mit ${}_0S_e$ bezeichnet werden.

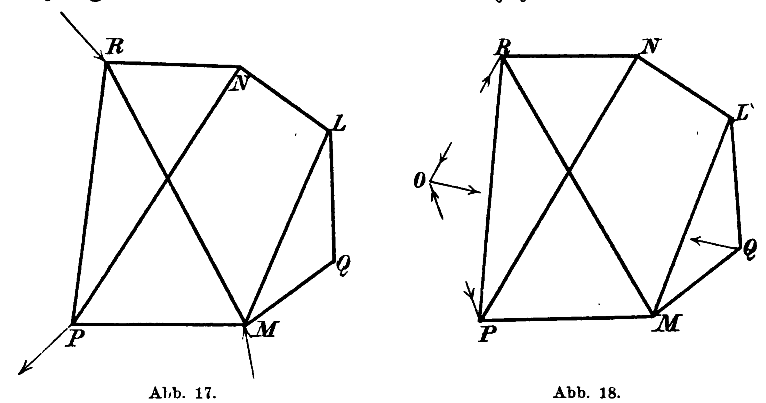


Abb. 17. Abb. 18.

2. Man bestimmt die Spannungen im reduzierten Fachwerk, die infolge einer beliebigen Kraft K in Richtung des Stabes OQ (Tauschstab, störender Stab) entstehen (wenn nur OQ entfernt wurde), bezw. infolge dreier Kräfte in Richtung der drei fortgenommenen Stäbe, die sich Gleichgewicht halten (Abb. 18). Beide Fälle sind völlig übereinstimmend, da ja durch Annahme der Kraft K auf Grund des Knotenpunktes O die Spannungen der beiden anderen Stäbe so bestimmt sind, daß sie mit K Gleichgewicht halten. Die Spannungen des i. Stabes seien S_i' und des Ersatzstabes S_e'.

In Wirklichkeit treten im gegebenen Fachwerk Spannungen auf, die zusammengesetzt sind aus denjenigen des ersten Be-

[1]) Henneberg, Statik d. st. S., S. 228.

lastungsfalles und denjenigen des zweiten, sofern hierbei im Tauschstabe OQ die wirkliche Spannung T eingeführt ist. Nun hatte man aber in Richtung des Stabes OQ die willkürliche Kraft K angenommen, die mit der wirklichen Spannung T im Zusammenhang stehen möge:

$$T = \lambda \cdot K, \tag{2}$$

so daß in irgend einem Stab als wirkliche Spannung auftritt:

$$S_i = {}_0S_i + \lambda \cdot S_i'. \tag{3}$$

Nimmt man im Tauschstab statt der willkürlichen Spannung K den Wert „1“ an, so ist

$$\lambda = T,$$

also gleich der wirklichen Spannung, und man hat:

$$S_i = {}_0S_i + T \cdot S_i', \tag{3a}$$

wobei also jetzt S_i' die Spannung des i. Stabes infolge einer Kraft $K = 1$ in Richtung des Tauschstabes bedeutet.

Die Größe λ ist zu berechnen. Dieselbe kann übrigens auch aufgefaßt werden als ein Zahlenwert, der den Maßstab im Kräfteplan S_i' ändert. Stellt in demselben bei willkürlicher Spannung K etwa 1 cm: m kg vor, so bedeutet bei richtiger Größe T dann 1 cm: $\lambda \cdot m$ kg.

Zur Bestimmung von λ bedenkt man, daß der Ersatzstab im gegebenen Fachwerk überhaupt fehlt, daß also, wenn die Spannung des Tauschstabes richtig eingeführt ist, im Ersatzstab die Spannung Null entstehen muß, so daß man die Bedingungsgleichung erhält:

$$0 = {}_0S_e + \lambda \cdot S_e'$$

$$\lambda = -\frac{{}_0S_e}{S_e'} \tag{4}$$

bezw. bei $K = 1$:

$$T = -\frac{{}_0S_e}{S_e'}. \tag{4a}$$

Da ${}_0S_i$ und S_i' bestimmte endliche Werte sind, indem ja das reduzierte System stets als statisch bestimmtes einzuführen ist, ist S_i (Gl. 3) dann endlich und eindeutig, wenn dies für λ

der Fall ist. Aus dem Werte für λ (Gl. 4) geht aber hervor, daß derselbe sowohl vieldeutig wie unendlich groß werden kann, sofern $S_e' = 0$ ist:

1. Ist $S_e' = 0$, aber ${}_0S_e \gtrless 0$, so wird λ unendlich groß, es erhalten also auch die Stabspannungen unendlich große Werte.

2. Ist $S_e' = 0$ und ${}_0S_e = 0$, so ergibt sich für λ und damit für die Spannungen S_i ein vieldeutiger Wert.

Man erkennt aus dieser Betrachtung, daß wohl ein aus einem sicher statisch bestimmten System (Abb. 17) mittels Stabvertauschung abgeleitetes System (Abb. 16) statisch bestimmt sein kann, daß dies aber nicht immer der Fall sein muß. Es läßt sich nun zeigen, daß bei Verschiebungsmöglichkeit der Punkte P, R der Ausnahmefall wieder vorliegt, sofern die vier Punkte P, Q, R und O auf demselben Kegelschnitt liegen, der schon in § 1 erwähnt wurde. Auf analytischem Wege wurde dieses Ergebnis von Henneberg allgemein bewiesen, und damit gezeigt, daß jedes aus einem sicher stabilen Gebilde durch derartige Stabvertauschung entstandene kinematisch bestimmte System auch statisch bestimmt ist.[1] Da aber jedes Stabsystem mit $(2n - 3)$ Stäben mit Hilfe des Hennebergschen Reduktionsgesetzes durch allmähliche Reduktion aus einem sicher stabilen und statisch bestimmten abgeleitet werden kann, das nach einem der beiden ersten Bildungsgesetze hergestellt ist, so ist damit auch bewiesen, daß jedes stabile System mit $(2n - 3)$ Stäben auch statisch bestimmt ist und umgekehrt.

Die Stabzahl $(2n - 3)$ ist hier besonders zu betonen; denn all diese Systeme, die aus den einfachen durch Stabvertauschung hervorgehen, haben so viel Stäbe, wie diese einfachen, also

$$s = 2n - 3.$$

Es möge nun auf andere Weise bewiesen werden, daß jedes kinematisch bestimmte System auch stabil ist, und hierzu der

[1]) Henneberg, Statik d. st. S., 1886.

Weg von Föppl[1]) benützt werden, der zu sehr wichtigen Ergebnissen führt.

§ 3. Allgemeiner Beweis, daß jedes statisch bestimmte System auch kinematisch bestimmt ist und umgekehrt.

9. Es liege irgend ein ebenes System mit n Knotenpunkten vor. Für ein solches wurde schon oben gezeigt, daß es nur

$$s = (2n - 3)$$

Stäbe besitzen darf, so viel aber auch besitzen muß, damit es statisch bestimmt ist, indem ja nur $(2n - 3)$ Gleichungen mittels der statischen Bedingungen aufgestellt werden können. Allerdings werden aber in einem solchen System keineswegs immer eindeutige und endliche Spannungswerte auftreten, da ja s Gleichungen mit s Unbekannten auch vieldeutige oder unendlich große Lösungswerte zulassen.

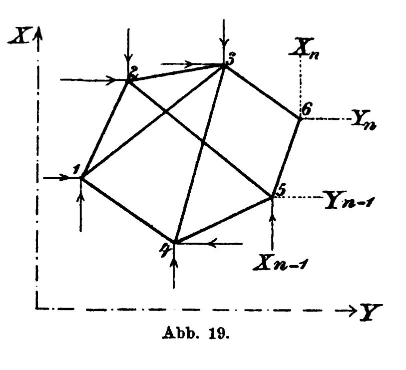


Abb. 19.

Von den $2n$ Kraftkomponenten: $X_1, X_2 \cdots X_n, Y_1, Y_2 \cdots Y_n$ mögen: $X_1,\ X_2 \cdots X_{n-1},\ Y_1,\ Y_2 \cdots Y_{n-2}$ willkürlich angenommen werden, während $X_n,\ Y_{n-1},\ Y_n$ durch diese Größen bestimmt sind. Der Knotenpunkt 1 in Abb. 19 liefert folgende zwei Gleichungen:

$$S_{12} \cdot \frac{x_2 - x_1}{l_{12}} + S_{13} \cdot \frac{x_3 - x_1}{l_{13}} + S_{14} \cdot \frac{x_4 - x_1}{l_{14}} + X_1 = 0,$$

$$S_{12} \cdot \frac{y_2 - y_1}{l_{12}} + S_{13} \cdot \frac{y_3 - y_1}{l_{13}} + S_{14} \cdot \frac{y_4 - y_1}{l_{14}} + Y_1 = 0,$$

---

[1]) Föppl sprach als Erster obigen Satz aus in seinem Buch: Theorie d. Fachwerks, Leipzig 1880. — Strengen Beweis gab er 1887 in d. Schweiz. Bauztg., S. 42; vgl. Raumfachwerke, Leipzig 1892 — D. graph. Statik, 2. Aufl., S. 238.

oder allgemein:

$$X_i + \sum^k {}_iS_k \cdot \frac{x_k - x_i}{l_{ik}} = 0,$$

$$Y_i + \sum^k {}_iS_k \cdot \frac{y_k - y_i}{l_{ik}} = 0,$$

wenn x_i, y_i die Koordinaten des i. Punktes für ein beliebiges rechtwinkeliges Koordinatensystem angeben, X_i, Y_i die Komponenten der Kraft P_i in Richtung der beiden Achsen, S_{ik} die Spannung des Stabes zwischen dem i. und k. Punkt[1]) und l_{ik} seine Länge. Gemäß den $(2n-3)$ freien Kraftkomponenten treten $(2n-3)$ entsprechend gebaute Gleichungen auf, wobei in jeder die von dem betreffenden Knotenpunkt auslaufenden Stäbe vorkommen.

Mit Rücksicht darauf, daß die Länge l_{ik} des r. Stabes zwischen i und k, die nun kurz l_r genannt werden möge, ausdrückbar ist durch:

$$l_r^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2, \tag{5}$$

ist weiter gegeben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial l_r}{\partial x_i} &= \frac{x_i - x_k}{l_r}, & \frac{\partial l_r}{\partial y_i} &= \frac{y_i - y_k}{l_r}, \\ \frac{\partial l_r}{\partial x_k} &= \frac{x_k - x_i}{l_r}, & \frac{\partial l_r}{\partial y_k} &= \frac{y_k - y_i}{l_r}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die erste der obigen Gleichungen kann demnach geschrieben werden:

$$S_{12} \cdot \frac{\partial l_{12}}{\partial x_1} + S_{13} \cdot \frac{\partial l_{13}}{\partial x_1} + S_{14} \cdot \frac{\partial l_{14}}{\partial x_1} = X_1 .$$

Es hat nun keinen Anstand, auch noch weitere Glieder dieser Gleichung beizufügen, nämlich von denjenigen Stäben, die nicht von Punkt 1 auslaufen, z. B. $S_{24} \cdot \frac{\partial l_{24}}{\partial x_1}$; denn da l_{24} überhaupt kein x_1 enthält, ist der Koeffizient $\frac{\partial l_{24}}{\partial x_1}$ sowieso gleich

[1]) Bei dieser Schreibweise der Gleichung gibt positiver Wert für S_{ik} eine Zugspannung, negativer eine Druckspannung an. Vgl. Henneberg, Statik d. st. S., S. 223, sowie Enzykl. IV, 5, S. 391.

Null. Man kann also an jedem Knoten i für die x-Richtung eine Gleichung aufstellen, in der sämtliche Stäbe $S_1, S_2 \cdots S_s$ auftreten, und deren Koeffizienten die Form haben

$$\frac{\partial l_1}{\partial x_i}, \frac{\partial l_2}{\partial x_i}, \cdots \frac{\partial l_s}{\partial x_i},$$

und eine entsprechende Gleichung für die y-Richtung. Die Koeffizienten aller derjenigen Stäbe, die nicht vom i. Punkt ausgehen, sind von selbst Null. Man erhält demgemäß folgende $s = (2n - 3)$ Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
S_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x_1} + S_2 \cdot \frac{\partial l_2}{\partial x_1} + \cdots + S_r \cdot \frac{\partial l_r}{\partial x_1} + \cdots + S_s \cdot \frac{\partial l_s}{\partial x_1} = X_1 \\
S_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x_2} + S_2 \cdot \frac{\partial l_2}{\partial x_2} + \cdots + S_r \cdot \frac{\partial l_r}{\partial x_2} + \cdots + S_s \cdot \frac{\partial l_s}{\partial x_2} = X_2 \\
\vdots \\
S_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x_{n-1}} + S_2 \cdot \frac{\partial l_2}{\partial x_{n-1}} + \cdots + S_r \cdot \frac{\partial l_r}{\partial x_{n-1}} + \cdots + S_s \cdot \frac{\partial l_s}{\partial x_{n-1}} = X_{n-1} \\
S_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial y_1} + S_2 \cdot \frac{\partial l_2}{\partial y_1} + \cdots + S_r \cdot \frac{\partial l_r}{\partial y_1} + \cdots + S_s \cdot \frac{\partial l_s}{\partial y_1} = Y_1 \\
S_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial y_2} + S_2 \cdot \frac{\partial l_2}{\partial y_2} + \cdots + S_r \cdot \frac{\partial l_r}{\partial y_2} + \cdots + S_s \cdot \frac{\partial l_s}{\partial y_2} = Y_2 \\
\vdots \\
S_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial y_{n-2}} + S_2 \cdot \frac{\partial l_2}{\partial y_{n-2}} + \cdots + S_r \cdot \frac{\partial l_r}{\partial y_{n-2}} + \cdots + S_s \cdot \frac{\partial l_s}{\partial y_{n-2}} = Y_{n-2}
\end{array}\right\} \quad (7)$$

Auf diese Weise ist ein System von gleichartig gebauten Gleichungen gewonnen, für das mit Vorteil die Determinanten verwendet werden können; daß in Wirklichkeit eine Anzahl von Koeffizienten den Wert Null besitzt, stört weiter nicht.

Diese $(2n - 3)$ Gleichungen liefern für die Unbekannten $S_1 \cdots S_s$ nur dann eindeutige und endliche Werte,[1]) wenn die Determinante des Systems D einen von Null verschiedenen Wert besitzt:

---

[1]) Vgl. z. B. Dölp, Determinanten, Darmstadt.

$$D \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial l_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial l_s}{\partial x_1} \\ \frac{\partial l_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial l_r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial l_s}{\partial x_2} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial l_1}{\partial x_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial l_r}{\partial x_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial l_s}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial l_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial l_r}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial l_s}{\partial y_1} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial l_1}{\partial y_{n-2}} & \cdots & \frac{\partial l_r}{\partial y_{n-2}} & \cdots & \frac{\partial l_s}{\partial y_{n-2}} \end{vmatrix} \gtrless 0. \qquad (8)$$

Also ist ein Stabsystem statisch bestimmt, wenn es $(2n - 3)$ Stäbe besitzt und die Determinante $D \gtrless 0$.

10. Es soll weiter das System bezgl. seines kinematischen Verhaltens analytisch untersucht werden; d. h. es sind die Bedingungen aufzustellen, die ausdrücken, daß alle Punkte bei Anwendung von völlig starren Stäben eine unverschieblich feste Lage besitzen. Zu diesem Zweck möge zunächst angenommen werden, daß jeder Stab S_r elastisch ist, also eine gewisse Längenänderung δl_r zuläßt. Die Änderungen des i. und k. Punktes vom Stabe S_r werden in zwei Komponenten in der x- und y-Richtung zerlegt, die mit δx_i, δy_i bezw. δx_k, δy_k bezeichnet werden mögen. Der Knotenpunkt n (8) soll völlig festgehalten werden, ebenso der Stab ${}_nS_{n-1}$ (8, 7) in seiner Richtung (Abb. 20).

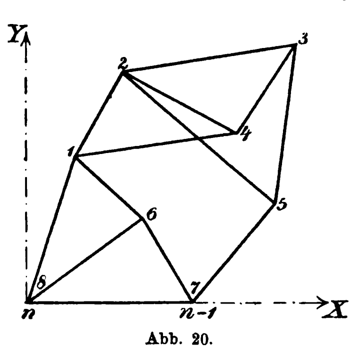


Abb. 20.

Natürlich kann sich noch der $(n - 1)$. Punkt in Richtung des Stabes verschieben, da ja der Stab als elastisch angenommen ist. Legt man nun den Ursprung des Koordinatensystems in den n. Punkt und die

Richtung der x-Achse in diejenige des festgehaltenen Stabes n, $n-1$, so ist

$$\delta x_n = 0, \quad \delta y_n = 0, \quad \delta y_{n-1} = 0.$$

Von den $2n$ Verrückungen der n Knotenpunkte sind nur noch $(2n-3)$ unbekannt; zu ihrer Bestimmung sind $(2n-3)$ Gleichungen notwendig; diese werden von den Stäben geliefert.

Die Verschiebungen des i. und k. Knotenpunktes, d. i. der Endpunkte des r. Stabes mit der Länge l_r, treten auf bei Differentiation der Gleichung:

$$(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 = l_r^2,$$

also in der Formel:

$$(x_i - x_k) \cdot \delta x_i + (x_k - x_i) \cdot \delta x_k + (y_i - y_k) \cdot \delta y_i + (y_k - y_i) \cdot \delta y_k = l_r \cdot \delta l_r. \tag{9}$$

Derartige Gleichungen lassen sich soviel aufstellen, wie Stäbe vorhanden sind. Da aber $(2n-3)$ Gleichungen nötig sind zur Bestimmung der $(2n-3)$ Verrückungen, so muß ein ebenes System, dessen Verrückungen bei bekannten Längenänderungen der Stäbe bestimmt sein sollen, $(2n-3)$ Stäbe besitzen, also gerade soviel als das statisch bestimmte.

Für die Koeffizienten der letzten Gleichung können die schon früher benutzten partiellen Differentialquotienten eingesetzt:

$$l_r \cdot \frac{\partial l_r}{\partial x_i} \cdot \delta x_i + l_r \cdot \frac{\partial l_r}{\partial x_k} \cdot \delta x_k + l_r \cdot \frac{\partial l_r}{\partial y_i} \cdot \delta y_i + l_r \cdot \frac{\partial l_r}{\partial y_k} \cdot \delta y_k = l_r \cdot \delta l_r,$$

und wie bei der statischen Betrachtung noch weitere Glieder zugefügt werden, die sich auf die übrigen Knotenpunkte des Fachwerks beziehen, da alle Differentialquotienten von l_r nach einem Wert x_m oder y_m, der nicht einem Endpunkt von l_r angehört, verschwinden. Die Gleichung des r. Stabes würde demgemäß bei allgemeiner Schreibweise $(2n-3)$ Glieder enthalten:

$$\frac{\partial l_r}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 + \frac{\partial l_r}{\partial x_2} \cdot \delta x_2 + \cdots + \frac{\partial l_r}{\partial x_{n-1}} \cdot \delta x_{n-1} + \frac{\partial l_r}{\partial y_1} \cdot \delta y_1 + \cdots$$
$$+ \frac{\partial l_r}{\partial y_{n-2}} \cdot \delta y_{n-2} = \delta l_r,$$

und im ganzen wird ein System von $(2n - 3)$ Gleichungen dieser Bauart gewonnen:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial l_1}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 + \cdots + \frac{\partial l_1}{\partial x_{n-1}} \cdot \delta x_{n-1} + \frac{\partial l_1}{\partial y_1} \cdot \delta y_1 + \cdots + \frac{\partial l_1}{\partial y_{n-2}} \cdot \delta y_{n-2} = \delta l_1 \\
\frac{\partial l_2}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 + \cdots + \frac{\partial l_2}{\partial x_{n-1}} \cdot \delta x_{n-1} + \frac{\partial l_2}{\partial y_1} \cdot \delta y_1 + \cdots + \frac{\partial l_2}{\partial y_{n-2}} \cdot \delta y_{n-2} = \delta l_2 \\
\vdots \\
\frac{\partial l_r}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 + \cdots + \frac{\partial l_r}{\partial x_{n-1}} \cdot \delta x_{n-1} + \frac{\partial l_r}{\partial y_1} \cdot \delta y_1 + \cdots + \frac{\partial l_r}{\partial y_{n-2}} \cdot \delta y_{n-2} = \delta l_r \\
\vdots \\
\frac{\partial l_s}{\partial x_1} \cdot \delta x_1 + \cdots + \frac{\partial l_s}{\partial x_{n-1}} \cdot \delta x_{n-1} + \frac{\partial l_s}{\partial y_1} \cdot \delta y_1 + \cdots + \frac{\partial l_s}{\partial y_{n-2}} \cdot \delta y_{n-2} = \delta l_s.
\end{array}\right\} \quad (10)$$

Wenn die Werte $\delta l_1 \cdots \delta l_s$ bekannt sind, so sind durch diese Gleichungen die Verschiebungen aller Knotenpunkte bestimmt. Nun sind aber bei starren Stäben, die bei den statisch bestimmten Systemen vorausgesetzt werden, diese Werte δl_r alle gleich Null, und man erhält damit ein System von $(2n - 3)$ homogenen Gleichungen. Verschwindet die Determinante des Systems, so besitzen δx_1, $\delta y_1 \cdots \delta y_{n-2}$ bestimmte, von Null verschiedene Werte. Da aber gerade bei starren Stäben die Knotenpunkte keine Verschiebungen erleiden sollen, so müssen die Unbekannten δx_1, $\delta y_1 \cdots \delta y_{n-2}$ alle Null werden, und das ist nur möglich, wenn die Determinante des Systems einen von Null verschiedenen Wert hat. Also ein Stabsystem ist nur dann kinematisch bestimmt,[1]) wenn es $(2n-3)$ Stäbe besitzt und die Determinante D' einen von Null verschiedenen Wert hat:

---

[1]) Vgl. Enzykl. d. math. Wissensch. IV, 5. Die Anzahl der notwendigen Stäbe wurde von Mohr und Levy zuerst festgestellt; dagegen die Determinantenbedingung von Föppl.

$$D' \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial x_1} & \frac{\partial l_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial l_1}{\partial x_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial l_1}{\partial y_{n-2}} \\ \frac{\partial l_2}{\partial x_1} & \frac{\partial l_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial l_2}{\partial x_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial l_2}{\partial y_{n-2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial l_r}{\partial x_1} & \frac{\partial l_r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial l_r}{\partial x_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial l_r}{\partial y_{n-2}} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial l_s}{\partial x_1} & \frac{\partial l_s}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial l_s}{\partial x_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial l_s}{\partial y_{n-2}} \end{vmatrix} \gtrless 0. \tag{11}$$

Man hat demnach als Bedingung für die kinematische Bestimmtheit eine ganz ähnliche erhalten, wie diejenige für die statische Bestimmtheit (8). In beiden Fällen muß eine gewisse Determinante s. Grades von Null verschieden sein. Nun unterscheiden sich aber die Determinanten D und D' nur dadurch, daß Reihen und Kolonnen miteinander vertauscht sind; sie haben also nach der Determinantentheorie beide denselben Wert, und man hat damit das Resultat gewonnen: Dieselbe Determinante, deren Nichtverschwinden die kinematische Bestimmtheit anzeigt, ist auch maßgebend für die statische Bestimmtheit; oder:

Jedes stabile System mit $(2n-3)$ Stäben (d. h. kinematisch bestimmte System) ist statisch bestimmt und umgekehrt.

Es ist demgemäß nicht nötig, zu untersuchen, ob ein System die beiden Forderungen erfüllt, sondern nur, ob es der einen genügt. Zweckmäßig ist es nun, von der statischen Forderung auszugehen, also nachzusehen, ob bei beliebigen Lasten alle Spannungen eindeutig und endlich sind, und hieraus auf die Stabilität zu schließen.

11. Bis hierher wurde unter einem statisch bestimmten System ein solches verstanden, das für jede beliebige Belastung in allen Stäben eindeutige und endliche Spannungen aufweist. Diese Forderung deckt sich aber mit derjenigen, daß das Fachwerk für irgend eine Belastung eindeutige und endliche

Spannungen zeigt; denn wenn dies bei einer Belastung der Fall ist, gilt es auch für alle Belastungsfälle.

Dies geht sofort aus den Gleichungen (7) hervor.[1] Die Koeffizienten der S_i sind Größen, die nur von der Stabanordnung abhängen, aber mit der äußeren Belastung gar nichts zu tun haben; nur auf der rechten Seite der Gleichungen stehen die äußeren Kräfte. Demgemäß treten in der Determinante D (Gl. 8) nur solche Größen auf, die von der äußeren Belastung vollständig unabhängig sind. Irgend eine Spannung S_i ist bestimmt durch die Formel:

$$S_i = \frac{D_i}{D}, \tag{12}$$

wenn D_i eine Determinante $(2n - 3)$. Grades angibt, die sich von D nur dadurch unterscheidet, daß an die Stelle derjenigen Kolonne, die die Koeffizienten der S_i enthält, die Kolonne der äußeren Kräfte $X_1 \cdots Y_{n-2}$ tritt. Die Spannung S_i kann nur dann einen eindeutigen, endlichen Wert besitzen, wenn $D \gtrless 0$ ist. Ist $D = 0$, aber D_i von Null verschieden, so wird S_i unendlich groß, ist jedoch außer D auch D_i gleich Null, so ist die Spannung S_i vieldeutig, kann allerdings für einzelne Stäbe einen bestimmten Wert erhalten.

Da die Determinante D von der äußeren Belastung unabhängig ist, so verschwindet sie für jede beliebige Belastung, sofern sie bei einer einzigen verschwindet. Da nun das Auftreten einer vieldeutigen oder unendlich großen Spannung immer angibt, daß die Determinante D verschwindet, so kann man sagen: Wenn bei irgend einer Belastung Stäbe eines Systems von $(2n - 3)$ Stäben unendlich große oder vieldeutige Spannungen erhalten, so treten dieselben bei jeder beliebigen Belastung auf. Ist aber für irgend eine Belastung die Spannung aller Stäbe eindeutig und endlich, so ist die Determinante D von Null verschieden, und zwar nicht nur für den einen Belastungsfall, sondern ganz allgemein, und man findet hiermit den Satz:

---

[1] Henneberg, Bericht über die Entwicklg. u. d. Hauptaufg. d. Theorie d. einf. Fachwerke. Deutsch. Math.-Vereinigg. 1894, S. 594.

Ist für irgend eine Belastung in allen Stäben eines ebenen Systems mit $(2n - 3)$ Stäben die Spannung eindeutig und endlich, so ist sie es auch für alle Belastungsfälle, das System ist also statisch bestimmt und demnach auch stabil.

Wird nun als spezieller Belastungsfall derjenige eingeführt, bei dem alle äußeren Kräfte den Wert Null besitzen, so gehen die $(2n - 3)$ Gleichungen (7) in $(2n - 3)$ homogene Gleichungen über. Die Determinante D muß nach dem allgemeinen Beweis stets von Null verschieden sein. Wenn aber bei einem System von homogenen Gleichungen die Determinante nicht verschwindet, so müssen alle Unbekannte den Wert Null besitzen; nur dann können die $(2n - 3)$ Gleichungen nebeneinander bestehen. Man hat damit den Satz[1]) gewonnen:

Sind keine äußeren Kräfte bei einem ebenen System von $(2n - 3)$ Stäben vorhanden, so müssen in allen Stäben die Spannungen Null auftreten, sofern das System statisch bestimmt und auch stabil sein soll, und die besonders wichtige Umkehrung: Wenn bei einem ebenen System mit $(2n - 3)$ Stäben beim Fehlen von äußeren Kräften in allen Stäben die Spannung Null eindeutig auftritt, dann ist dasselbe statisch bestimmt und stabil.

Dieser letztere Satz, der wohl zuerst von Henneberg bemerkt wurde,[2]) ist für die Stabilitätsuntersuchung von großer Bedeutung.

Es muß besonders betont werden, daß die richtige Stabzahl $s = 2n - 3$ allein nicht genügt zum Stabilitätsnachweis, sondern daß noch eine weitere Forderung erfüllt sein muß, z. B. dieser Satz. Es ist also nicht angebracht, daß einfach durch Nachzählen die richtige Anzahl der Stäbe festgestellt und daraus auf die Stabilität unter stillschweigender Voraussetzung der anderen Forderung geschlossen wird.

---

[1]) Föppl, Theorie d. Fachw., S. 26.

[2]) Entw. u. Hauptaufg. d. F., 1894, S. 594.

Das Nachzählen ist schon an und für sich unbefriedigend; es ist natürlicher, direkt nachzusehen, ob das System nach einem richtigen Bildungsgesetz aufgebaut ist; dann hat es unter allen Umständen die rechte Stabzahl. Bei einiger Übung kommt man damit auch schneller zum Ziele.

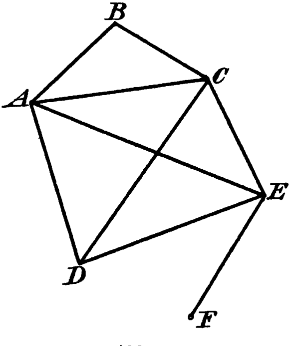


Abb. 21.

Nicht stabile Systeme wurden schon in Abb. 3, 4, 8 und 10 angeführt. Ebenso wäre beispielsweise Abb. 21 bezgl. des Stabes EF nicht stabil, da F nur durch einen Stab angeschlossen ist, während der übrige Teil wohl stabil, aber kinematisch überbestimmt, also statisch unbestimmt ist, indem er einen Stab zu viel besitzt. Das Bildungsgesetz zeigt das auf den ersten Blick, ohne daß man besonders nachzuzählen hätte.

§ 4. Die Spannungsbestimmungs-Methode der Stabvertauschung oder des Ersatzstabes.

12. Liegt ein Fachwerk vor, das nach dem ersten oder zweiten Bildungsgesetz hergestellt, so kann die Ermittelung der Spannungen nach den früheren Ausführungen leicht geschehen. Für andere Fachwerke von $(2n - 3)$ Stäben führen vielfach besondere Methoden, meistens Momentenmethoden, zum Ziele, manchmal aber sind allgemeine Verfahren anzuwenden, wie solche z. B. von Henneberg, Müller-Breslau, Mohr angegeben wurden.

Die erste vollständige Methode wurde von Henneberg gefunden und ist bereits in § 2 kurz besprochen worden. Durch Fortnahme eines Knotenpunktes, resp. eines Stabes, wird ein System mit einer gewissen Bewegungsfähigkeit gewonnen, diese dann aufgehoben durch Einfügung eines Stabes mit ganz spezieller Lage. Ist das so gebildete System noch nicht genügend einfach, so kann dasselbe noch ein oder mehrere Male reduziert werden. Das Wesentliche ist, daß ein System durch

ein- oder mehrmalige Stabveränderung in ein solches verwandelt wird, das sicher stabil ist, und dessen Spannungen ohne Schwierigkeit ermittelt werden können. Dann sind die Spannungen im gegebenen System mittels der Formel

$$S_i = {}_0S_i + \lambda \cdot S_i'$$

bestimmbar.

Es wurde schon in § 1 betont, daß die durch Fortnahme eines Knotenpunktes bezw. des Tauschstabes hervorgerufene Beweglichkeit keineswegs nur durch einen Stab in der erwähnten speziellen Lage aufgehoben werden kann, daß vielmehr die verschiedenartigsten Ersatzstäbe diesen Zweck erfüllen, nur ist stets darauf zu achten, daß das neue System stabil ist; so kann z. B. in Abb. 16 an die Stelle des Stabes PR der Stab MN treten, da dies neue System ebenfalls nach dem ersten Bildungsgesetz aufgebaut ist. Daß diese von Müller-Breslau eingeführte allgemeine Stabvertauschung in vielen Fällen für die Reduktion von vorliegenden Fachwerken und ihre Berechnung vorteilhafter, ist einleuchtend.

Als eigentlicher Urheber der Methode ist jedoch Henneberg anzusehen, welcher ja auch die Berechnungsweise für ein beliebiges

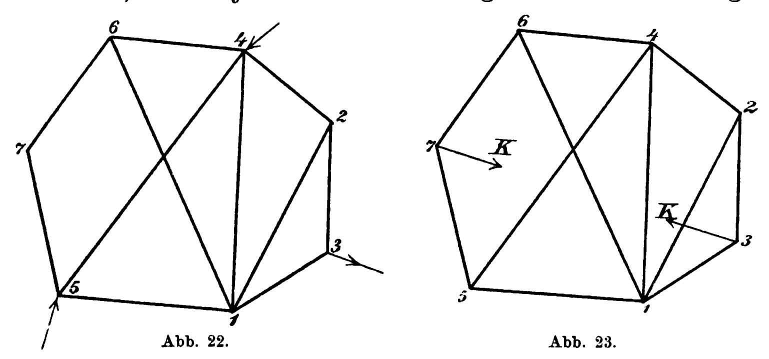


Abb. 22. Abb. 23.

ebenes Fachwerk mit $(2n - 3)$ Stäben hierbei angab, die auch Müller-Breslau bei seiner „Methode des Ersatzstabes"[1])

[1]) Müller-Breslau, Statik d. Baukonstruktionen, I. Bd., Leipzig 1887, S. 213; 3. Aufl. 1903. — Zentralbl. d. Bauverw. 1903. — Ztschr. f. Arch. u. Ingw. 1903 usw.

benützt: Er führt einmal auf das verwandelte Fachwerk nur die äußere Belastung ein (Abb. 22), erhält so die Spannungen ${}_0S_i$, dann nur in Richtung des Tauschstabes an beiden Endpunkten eine beliebige Kraft $K\left(=\frac{T}{\lambda}\right)$, z. B. $K=1$ (Abb. 23), und hat dann ebenfalls:

$$S_i = {}_0S_i + \frac{T}{K}\cdot S_i',$$

wobei der Faktor $\lambda = \frac{T}{K}$ gegeben ist durch:

$$\lambda = -\frac{{}_0S_e}{S_e'}.$$

Dadurch, daß Müller-Breslau die verallgemeinerte Methode an den verschiedensten Beispielen zeigte, ihre Vorteile, besonders bei mehrfacher Stabvertauschung, darlegte, hat er das Hennebergsche Stabvertauschungsverfahren als Methode des Ersatzstabes zu der jetzigen Bedeutung gebracht.

13. Auch für die reine Stabvertauschung läßt sich eine Regel aufstellen, die auf dem ersten Bildungsgesetz beruht und direkt angibt, wie man den oder die Ersatzstäbe anzuordnen hat, um ein sicher stabiles Fachwerk zu erhalten. Dieselbe wurde für gestützte Systeme von Müller-Breslau im Jahre 1903 ausgesprochen,[1] kann aber natürlich auch für freie Fachwerke benützt werden.

Es wurde schon oben (S. 15) betont, daß bei Bestimmung der $(2n-3)$ Spannungen eines ebenen Systems jeder Knotenpunkt mit Ausnahme von zweien zwei Bedingungen aufweist, aber diese beiden letzten zusammen nur eine Bedingung angeben. Es darf demgemäß bei einem System nach dem ersten Bildungsgesetz an den zwei letzten Knotenpunkten zusammen nur eine unbekannte Stabspannung wirken, dagegen werden an allen übrigen Punkten zwei unbekannte Spannungen aufzutreten haben. In Abb. 24 weist z. B. Knoten-

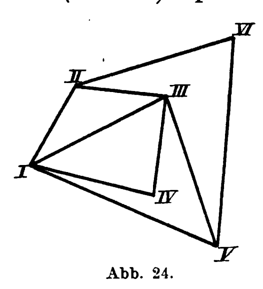


Abb. 24.

[1]) Zentralbl. d. Bauverw. 1903, S. 509.

punkt VI zwei unbekannte Spannungen auf, dann V auch deren zwei, entsprechend IV und III; an II ist nur noch eine Unbekannte vorhanden und schließlich an I keine mehr. Im allgemeinen kann man natürlich in verschiedener Weise eine derartige Reduktion vornehmen; so ist es in vorliegendem Beispiel nicht nötig, gerade I und II mit dem Stab $\overline{I, II}$ als Endsystem zu betrachten.

Es soll nun nach ähnlichen Grundsätzen nebenstehendes System (Abb. 25) reduziert werden, das keinen zweifachen Knotenpunkt besitzt. Der Stab $\overline{VI, VII}$ wird als störender Stab (Laststab)[1] angesehen und weggenommen gedacht. Seine unbekannte Spannung sei T. Ist diese bekannt, so ist die Aufgabe gelöst. Nach Entfernung dieses Stabes sind am Knotenpunkt VII noch zwei unbekannte Spannungen vorhanden, an VI dann ebenfalls deren zwei, ebenso an V und IV. Es bleiben noch die Punkte III, II, I übrig, von denen Punkt II wieder zwei unbekannte Spannungen aufweist, aber alsdann I und III überhaupt keine mehr. Nun müßten aber diese beiden letzten Punkte zusammen noch eine unbekannte Spannung zeigen, wenn das System richtig gebildet wäre; es fehlt also zwischen diesen beiden ein Stab, oder mit anderen Worten: zwischen I und III ist der Ersatzstab einzufügen. Das so gebildete System ist sicher statisch bestimmt, da es nach einfachem Bildungsgesetz hergestellt ist: I, II, III, IV, V, VI, VII. Es können hiernach die Stäbe VII, VI und I, III miteinander vertauscht werden.

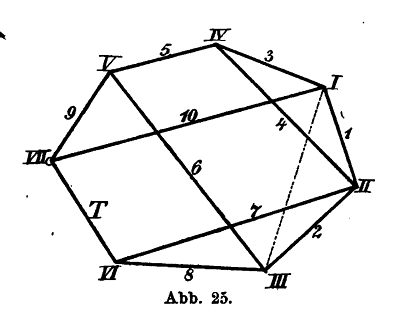


Abb. 25.

Da sich der Begriff statisch bestimmt mit kinematisch bestimmt bei den Fachwerken deckt, so kann man die er-

[1]) Die Bezeichnung „Laststab" wurde von Mohr eingeführt. Zentralbl. 1902. — Mehrtens, Statik d. Baukonstr., Bd. I, S. 255. — Mohr, Abhandlgn. a. d. Gebiete d. techn. Mech., Berlin 1906, S. 437.

wähnte Untersuchung auch rein kinematisch durchführen. Das zuerst betrachtete System Abb. 24 ist sicher stabil, da je ein Knotenpunkt durch zwei Stäbe angeschlossen ist, die nicht in einer Linie liegen; nimmt man nach und nach je einen Punkt mit zwei Stäben (VI, V, ···) fort, so bleibt stets noch ein stabiles System übrig, man gelangt schließlich zu dem Grunddreieck I, II, III bezw. dem Grundstab,[1]) etwa I II, der ja sicher ein starres Gebilde darstellt. Bei dem zweiten Fachwerk (Abb. 25) liegen die Verhältnisse anders. Durch Fortnahme des störenden Stabes tritt unbedingt ein bewegliches System auf; das kann aber wieder in ein festes verwandelt werden, wenn man den Ersatzstab so einzieht, daß ein starres Ausgangssystem erhalten wird, an das je ein Punkt durch zwei Stäbe (nicht in derselben Richtung) angeschlossen ist. Man hat hiernach zur Gewinnung eines passenden Ersatzstabes bei einfacher Stabvertauschung die Regel: Sind keine zweifachen Knotenpunkte vorhanden, so nimmt man zunächst den Stab eines dreifachen Knotenpunktes als störenden Stab fort, denkt sich dann diesen zweifachen Knotenpunkt (VI) entfernt, hierauf die übrigen Punkte mit je zwei Stäben, und gelangt schließlich zu einem beweglichen Endsystem (da ja zwei Knotenpunkte I, II ohne verbindenden Stab übrig bleiben), das durch Einfügung des Ersatzstabes in ein starres Ausgangssystem zu verwandeln ist.

Nach dieser Regel läßt sich die Stabvertauschung immer in sicherer Weise mit einfachster Überlegung ausführen.

14. In manchen Fällen wird man allerdings ein gegebenes Stabsystem nicht durch eine einmalige Stabvertauschung in ein solches verwandeln können, das einfach aufgebaut ist. Für diesen Fall tritt eine Erweiterung des seitherigen Verfahrens ein. Die Hennebergsche Reduktion ist ohne weiteres anwendbar, wie dies z. B. Abb. 26 zeigt. Man nimmt etwa

[1]) Der Begriff „Grundstab" und „Grundfigur", der für zusammengesetzte Fachwerke Bedeutung hat, rührt von G. Lang her (Rigaer Ind.-Ztg. 1889, S. 75).

Punkt V fort mit Stab 8, 5, 4, zieht dafür Stab $\overline{\text{I, VII}}$ ein, dann kann man übergehen zu III mit Stab 1 und 2, weiter zu II mit 6, 9, und IV, I, VII, VI, und gelangt zum System VIII—XIII, das wiederum nur dreifache Knotenpunkte aufweist; entfernt abermals einen solchen, z. B. VIII mit 12, 14, 22, zieht dafür $\overline{\text{X, IX}}$ ein, kann dann zu XIII und XII, XI übergehen, so daß

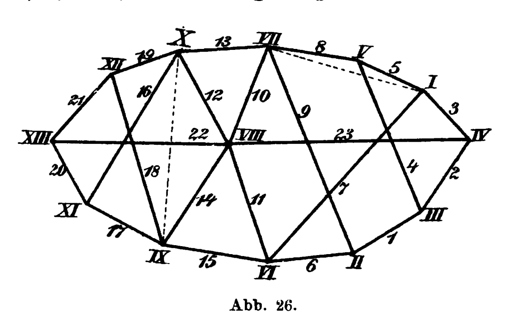


Abb. 26.

noch das sicher stabile Gebilde: Stab $\overline{\text{IX, X}}$ übrig bleibt. Als Ersatzstäbe traten also hierbei $\overline{\text{I, VII}}$ und $\overline{\text{X, IX}}$ auf, die an Stelle je eines Stabes der gestrichenen Knotenpunkte, etwa $\overline{\text{III, V}}$ und $\overline{\text{VIII, XIII}}$, einzuziehen sind.

Nach der Angabe für die allgemeine Stabvertauschung wird sich die Untersuchung dieses Beispiels folgendermaßen gestalten. Man fasse etwa Stab T_1 als störend auf, denke ihn entfernt, dann Knotenpunkt XIII mit den Stäben 20, 21 fortgenommen und weiter XII, XI, X, IX, wonach ein System mit nur dreifachen Punkten übrig bleibt. In diesem ist wieder ein Stab als störend zu betrachten, etwa T_2; dann ist Punkt VIII mit den Stäben 10, 11 zu entfernen, weiter VII, VI, V, IV, und man gelangt zu dem Endsystem I, II, III, das nur den einen Stab II III enthält, also labil ist. Um

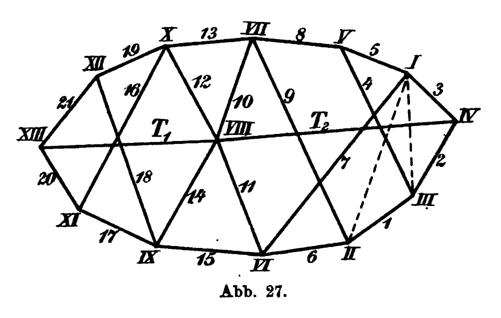


Abb. 27.

dieses Ausgangssystem starr zu gestalten, sind noch die beiden Stäbe $\overline{\text{I, II}}$ und $\overline{\text{I, III}}$ einzufügen (Abb. 27). Diese geben also die Ersatzstäbe an, die an Stelle der Tauschstäbe T_1 und T_2

treten und sicher ein stabiles System liefern; denn an das starre Ausgangssystem I, II, III sind dann durch je zwei Stäbe nacheinander angefügt die Knotenpunkte IV, V, ... XIII.

Zur systematischen Aufsuchung von Ersatzstäben, die irgend ein vorliegendes System in ein sicher stabiles verwandeln, hat man demnach folgendes Reduktionsgesetz: Man entferne einen dreifachen Knotenpunkt, streiche dann weiter nacheinander diejenigen mit zwei Stäben; sind solche nach einiger Reduktion nicht mehr vorhanden, so streiche man wiederum einen Knotenpunkt mit drei Stäben usw., bis man schließlich nur noch Knotenpunkte übrig hat, von denen weniger als zwei Stäbe mit unbekannten Spannungen auslaufen, oder also ein labiles Endsystem erhält. In dies Endsystem sind soviel Stäbe einzuziehen, als nötig, um dasselbe stabil zu machen; die Anzahl derselben muß bei richtiger Stabzahl gleich derjenigen der gestrichenen dreifachen Knotenpunkte sein. Vertauschungsfähig ist dann sicher je ein Stab der dreifachen Knotenpunkte mit den neu eingefügten Stäben. Im allgemeinen wird bei jedem dreifachen Knotenpunkt irgend einer der drei Stäbe entfernt werden können, doch darf niemals ein solcher fortgenommen werden, daß die zwei noch übrigen Stäbe dem Knotenpunkt eine Bewegung erlauben; so dürfte in nebenstehendem Beispiel (Abb. 28) wohl T_1 oder T_2 entfernt werden, aber nicht F.

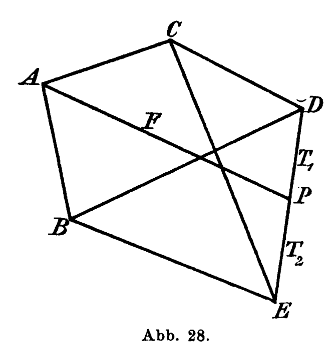


Abb. 28.

Es ist einleuchtend, daß man im allgemeinen auf verschiedene Weise zu dem labilen Endsystem gelangen kann, daß also auch verschiedenartige Ersatzstäbe an die Stelle der Tauschstäbe treten können, je nachdem man die Reduktion des gegebenen Fachwerks vorgenommen hat.

Bei Benützung der Stabvertauschung ist eine Nachzählung der Stabzahl überhaupt überflüssig. Man sucht schematisch

mittels der Vertauschung ein System herzustellen, das nach einfachem Bildungsgesetz aufgebaut ist. Ist dies möglich, so besitzt auch das ursprüngliche System sicher die richtige Stabzahl; denn das verwandelte System hat ja diese unbedingt, und durch die Stabvertauschung hat sich die Zahl der Stäbe nicht geändert. In den meisten Fällen sieht man direkt (auch ohne Regel), wie man die Verwandlung ausführen kann, und man erkennt damit viel rascher die Stabzahl als durch Nachzählen.

15. Das Wesen der Stabvertauschung möge noch an einem anderen Beispiel gezeigt werden, das sich durch einen speziellen Aufbau auszeichnet, indem ein Teil desselben für sich sicher stabil, also etwa nach dem ersten Bildungsgesetz, hergestellt ist. Der angefügte Teil muß, damit das ganze System die richtige Stabzahl hat, gerade doppelt so viel Stäbe besitzen, als Knotenpunkte; denn jeder Knotenpunkt des neuen Teiles weist ohne Einschränkung zwei Gleichungen auf, da die Kräfte an dem neuen Teil ganz beliebig gewählt werden dürfen, indem ja die Kräfte am unteren Ausgangsteil dann immer noch so angeordnet werden können, daß das ganze Kraftsystem im Gleichgewicht steht. Zur Reduktion des Systems nehme man einen Stab, etwa T, als störend fort, denke sich dann Punkt V mit den Stäben 8, 9 entfernt, weiter IV mit 6, 7, dann III mit 4, 5, und II mit 2, 3, und kommt zum Punkt I, der nur noch durch einen Stab angeschlossen ist, also gegenüber dem starren unteren Teil keine unverschiebliche Lage hat. Von I aus muß demnach der Ersatzstab gehen, damit das Ausgangssystem (Punkt I mit zwei Stäben) stabil ist. Der Ersatzstab kann demgemäß von I nach irgend einem Knotenpunkt des unteren Teiles geführt werden.[1])

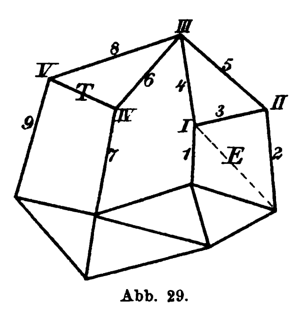


Abb. 29.

[1]) Daß man bei den Systemen der Abb. 28, 29 mit spezieller Methode einfacher zum Ziele kommt, möge nicht unerwähnt bleiben.

§ 5. Fortsetzung. Mehrfache Stabvertauschung und verwandte Verfahren.

16. Soll ein System mit keinem zweifachen Knotenpunkt berechnet werden, das durch mehrfache Stabvertauschung in ein sicher stabiles System übergeführt werden kann, so geschieht dies zweckmäßig nach den Angaben von Müller-Breslau, die eine direkte Erweiterung des Hennebergschen Berechnungsverfahrens darstellen. Ergeben sich eindeutige, endliche Spannungen, so ist damit gleichzeitig nachgewiesen, daß das betreffende Stabsystem, dessen richtige Stabzahl durch die Vertauschung bereits festgestellt ist, auch statisch bestimmt und stabil ist. Zur Berechnung bei zweifacher Stabvertauschung ermittle man die Spannungen für folgende Belastungsfälle:

1. Die Spannungen ${}_0S_i$ im reduzierten Fachwerk, auf das die gegebenen Lasten wirken; die Spannungen der beiden Ersatzstäbe seien ${}_1S_e^0$, ${}_2S_e^0$.

2. Die Spannungen S_i' im reduzierten Fachwerk, auf das in Richtung des fortgenommenen ersten Tauschstabes an beiden Knotenpunkten desselben eine beliebige Kraft K_1 (z. B. $K_1 = 1$) wirkt; die Spannungen der Ersatzstäbe seien ${}_1S_e'$, ${}_2S_e'$. Infolge der wirklichen Spannungen $T_1 = \lambda_1 \cdot K_1$ werden dann in den Fachwerksstäben die Spannungen: $\lambda_1 \cdot S_i'$ auftreten.

3. Die Spannungen im reduzierten Fachwerk, auf das in Richtung des fortgenommenen zweiten Tauschstabes an beiden Endpunkten eine beliebige Kraft K_2 (z. B. $K_2 = 1$) wirkt: S_i'', ${}_1S_e''$, ${}_2S_e''$. Infolge der wirklichen Spannung T_2 werden in den Fachwerksstäben Spannungen auftreten von der Größe $\lambda_2 \cdot S_i''$.

Tatsächlich wirken auf das ursprüngliche Fachwerk die drei Belastungszustände gleichzeitig ein, und es ist demgemäß nach dem Superpositionsgesetz im i. Stab eine Spannung:

$$S_i = {}_0S_i + \lambda_1 \cdot S_i' + \lambda_2 \cdot S_i''. \tag{13}$$

Nun sind aber im ursprünglichen System die beiden Ersatzstäbe

nicht vorhanden, so daß demnach die Werte λ_1 und λ_2 in der Weise zu bestimmen sind, daß:

$$ {}_1S_e = 0, \quad {}_2S_e = 0, $$

daß also:

$$ \begin{aligned} {}_1S_e^0 + \lambda_1 \cdot {}_1S_e' + \lambda_2 \cdot {}_1S_e'' = 0, \\ {}_2S_e^0 + \lambda_1 \cdot {}_2S_e' + \lambda_2 \cdot {}_2S_e'' = 0. \end{aligned} \tag{14} $$

Man findet hieraus für λ_1 und λ_2 die Ausdrücke:

$$ \lambda_1 = \frac{- {}_1S_e^0 \cdot {}_2S_e'' + {}_1S_e'' \cdot {}_2S_e^0}{{}_1S_e' \cdot {}_2S_e'' - {}_1S_e'' \cdot {}_2S_e'}, \quad \lambda_2 = \frac{- {}_1S_e' \cdot {}_2S_e^0 + {}_2S_e' \cdot {}_1S_e^0}{{}_1S_e' \cdot {}_2S_e'' - {}_1S_e'' \cdot {}_2S_e'}. $$

Sind K_1 und K_2 mit der Größe „1“ eingeführt worden, so stellen λ_1 und λ_2 die wirklichen Spannungen in den Tauschstäben dar.

Bei Benutzung von Determinanten kann man obige Ausdrücke in der Form schreiben:

$$ \lambda_1 = \frac{D_1}{D}, \quad \lambda_2 = \frac{D_2}{D}, $$

wenn D die Systemdeterminante der beiden Gleichungen (13) angibt und D_1, D_2 eine solche, die sich von D nur dadurch unterscheidet, daß an die Stelle der Koeffizienten ${}_1S_e'$, ${}_2S_e'$ bezw. ${}_1S_e''$, ${}_2S_e''$ die absoluten Glieder $- {}_1S_e^0$, $- {}_2S_e^0$ treten.

Von dieser Form ausgehend läßt sich die ganze Berechnungsweise auch bei Fachwerken anwenden, die eine mehr als zweifache Stabvertauschung erfordern; man erkennt ganz allgemein, daß die Stäbe S_i eindeutige und endliche Werte erhalten, sofern die Multiplikatoren λ_i eindeutig und endlich sind, d. h. wenn $D \gtrless 0$ ist. Der Grad der Determinante D ist durch die Anzahl der notwendigen Stabvertauschungen bestimmt. Wollte man ein System mittels der allgemeinen Fachwerksdeterminante untersuchen, so wäre eine solche vom $(2n - 3)$. Grade in Betracht zu ziehen. Bei Anwendung der Stabvertauschung reduziert sich diese auf eine solche vom m. Grade, wenn m die Anzahl der Ersatzstäbe angibt.

Die Berechnung nach diesen Angaben läuft im wesentlichen auf die hinaus, die Henneberg benutzt für ein System, das durch allmähliche m-malige Reduktion nach seiner speziellen

Regel in ein einfaches Fachwerk übergeführt ist. Öfters hat man dann hierbei zur Berechnung statt der m Gleichungen mit m Unbekannten, m-mal hintereinander die einfache Gleichung:

$$S_i = {}_0S_i + \lambda \cdot S_i'$$

zu verwenden. So wären bei dem System der Abb. 26 nach Fortnahme des Knotenpunktes V, bezw. eines Stabes, z. B. $\overline{\text{III, V}}$ desselben, und Einführung des Ersatzstabes E_1 $(\overline{\text{VII, I}})$ die Spannungen ${}_0S_i$ und S_i' der Stäbe 5, 8 (Knotenpunkt V), 1, 2 (III), 3, 23 (IV), 7, E_1 (I), 9, 6 (II), 11, 15 (VI) und 10, 13 (VII) zu ermitteln, dann mittels des Ersatzstabes E_1 der Wert von λ zu berechnen und hiermit die wirklichen Spannungen S_i der genannten Stäbe. Hierauf wäre das übrig bleibende System mit sechs Knotenpunkten zu betrachten, auf das nun die betreffenden äußeren Kräfte und die Spannungen der vom ersten Teil in diesen Knotenpunkten einlaufenden Stäbe wirken, und in gleicher Weise vorzugehen. Man hat bei derartiger Berechnung den Vorteil, daß man die Aufstellung mehrerer Gleichungen mit den entsprechenden Unbekannten vermeidet, erhält aber nach den obigen Angaben eine übersichtlichere Rechnung (vgl. Drittes Kapitel).

17. Das Wesentliche solcher Spannungsermittelungen liegt darin, daß man mittels dieser Angaben die Spannungen in den störenden Stäben finden kann. Jeder Ersatzstab liefert eine Bedingungsgleichung, und da nun so viel Ersatzstäbe vorhanden sind, wie störende Stäbe, so ist die Spannung derselben bestimmbar. Ist diese ermittelt, so bietet die Berechnung der übrigen Stabspannungen keine Schwierigkeiten mehr.

Dadurch, daß man die Multiplikatoren λ_i verwendet, also die verschiedenen Belastungszustände einzeln ins Auge faßt, läßt sich die Aufgabe der Hauptsache nach graphisch lösen, indem man die Kräftepläne ${}_0S_i$, S_i', S_i'' aufzeichnet; und das ist für ebene Systeme ein entschiedener Vorteil. Sieht man von der graphischen Lösung ab, so kann man das Verfahren in etwas variierter Form anwenden. Man führt die zunächst unbekannten Spannungen T_i der störenden Stäbe als äußere

Kräfte ein, die an den Endpunkten derselben angreifen, so daß auf das reduzierte System die Kräfte P_i und T_i wirken, und kann nun jede Spannung S_i als Funktion von den verschiedenen P_i und den T_i darstellen:

$$S_i = F_i(P_1, \cdots P_n, T_1, \cdots T_m),$$

findet also auch für die Ersatzstäbe derartige Ausdrücke. Da aber in Wirklichkeit die Spannungen der m Ersatzstäbe Null sein sollen, so hat man damit die nötigen Bedingungsgleichungen, indem ja die verschiedenen S_e die Werte T_i enthalten.

Führt man von vornherein an jedem Knotenpunkt eine allgemeine Belastung mit den Kräften X_i, Y_i ein, so erlaubt die Stabvertauschung, jede Spannung in der Form auszudrücken:

$$S_i = X_1 \cdot \xi_1 + Y_1 \cdot \eta_1 + \cdots + X_n \cdot \xi_n + Y_n \cdot \eta_n,$$

wobei die Koeffizienten ξ_i, η_i bestimmte Zahlen (Einflußzahlen) bedeuten.

18. Die Spannungen der störenden Stäbe T_1, $T_2 \cdots$ wurden bisher aus den Bedingungen bestimmt, daß die Spannungen der Ersatzstäbe für die wirklichen Spannungen T_1, $T_2 \cdots$ verschwinden müssen; es können dieselben aber auch mittels anderer Gleichgewichtsbedingungen gefunden werden, wie an dem Beispiele Abb. 30 gezeigt werden soll. Die Spannung im störenden Stab sei abermals T. Man bringt sie wiederum an den Endpunkten des störenden Stabes als zunächst unbekannte Kraft, als Last, an, die also zu den übrigen äußeren Kräften P_i mit den Komponenten X_i, Y_i, die am Fachwerk wirken, hinzutritt. Nun kann man mittels des Knotenpunktes VII die Spannungen in 10 und 9 ausdrücken durch die äußeren Kräfte X_7, Y_7 und T, dann weiter die Stabkräfte in 7 und 8 (an Knotenpunkt VI), ferner 5 und 6 (V), 2 und 4 (II) und 1 und 3 an I. Jede dieser Spannungen stellt sich also allgemein dar in der Form:

$$S_i = F_i(X_1, Y_1 \cdots T).$$

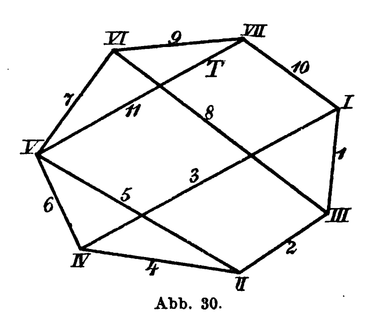


Abb. 30.

Es bleiben noch die Knotenpunkte III und IV übrig, die die zur Bestimmung von T nötige Bedingungsgleichung liefern: es muß ja bei richtiger Spannung T um die Punkte III und IV herum Gleichgewicht bestehen, also die Resultante von S_6, S_3 und P_{IV} in die Richtung von 4 (IV, II) fallen. Diese Bedingung drückt man am einfachsten dadurch aus, daß senkrecht zu 4 die Resultante von P_{IV}, S_6, S_3 keine Komponente besitzen darf:

$$S_6 \cdot \sin\alpha + S_3 \cdot \sin\beta + P_{IV} \cdot \sin\gamma = 0,$$

wenn α, β, γ die Winkel der Stäbe 6, 3' und der Kraft P_{IV} mit Stab 4 bedeuten. Da nun S_6 und S_3 die Größe T enthalten, so dient diese Gleichung zu deren Bestimmung.[1])

Will man die Aufgabe der Hauptsache nach graphisch lösen, so ermittelt man wiederum beim fehlenden Stab T einmal die Spannungen in 6 und 3, die infolge der wirklichen Belastung entstehen: ${}_0S_6$, ${}_0S_3$, und weiter diejenigen S_6', S_3' infolge einer beliebigen Spannung K im störenden Stab; die wirkliche Spannung der Stäbe ist alsdann wieder gegeben durch:

$$S_i = {}_0S_i + \lambda \cdot S_i'$$

und man hat demnach zur Bestimmung von λ die Gleichung:

$$({}_0S_6 + \lambda \cdot S_6') \sin\alpha + ({}_0S_3 + \lambda \cdot S_3') \sin\beta + P_{IV} \cdot \sin\gamma = 0.$$

Es ist selbstverständlich, daß dies nur eine andere Ausdrucksweise für die Bestimmungsweise von λ mittels Ersatzstäben ist; denn bei obiger Reduktion wäre der Ersatzstab zwischen IV und III einzuziehen; wenn aber die Resultante von S_6, S_3, P_{IV} in Richtung von 4 fällt, so tritt eben in diesem Ersatzstab keine Spannung auf. λ ist nach obiger Gleichung gegeben durch:

$$\lambda = -\frac{{}_0S_6 \cdot \sin\alpha + {}_0S_3 \cdot \sin\beta + P_{IV} \cdot \sin\gamma}{S_6' \cdot \sin\alpha + S_3' \cdot \sin\beta}.$$

---

[1]) Direkt mit Hilfe von Knotenpunkten scheint zum ersten Male Föppl gerechnet zu haben, Zentralbl. d. Bauv. 1901, S. 487; allgemein weist auf die Knotenpunktsbedingungen Mohr hin, Zentralbl. d. Bauv. 1902 u. 1903; s. auch Müller-Breslau, ebenda. — Vgl. § 14 dieses Werkes.

Das System ist stabil, wenn alle Spannungen eindeutig und endlich sind, wenn also λ eindeutig und endlich, d. h. sofern:

$$S_6' \cdot \sin \alpha + S_3' \cdot \sin \beta \gtrless 0.$$

§ 6. Kinematische Verfahren.

19. Als weitere Methode zur Spannungsberechnung ist als recht wichtig die kinematische anzuführen, die auf dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen beruht.[1]) Nachdem bereits früher Mohr[2]) dieses Prinzip bei Fachwerksuntersuchungen benützt und es als die Fundamentalgleichung der Fachwerkstheorie bezeichnet, sowie auch Föppl[3]) präzis ausgesprochen hatte, daß mit Hilfe desselben die Spannungen zu ermitteln seien, gab Müller-Breslau das im folgenden beschriebene, sehr gewandt aufgebaute kinematische Verfahren an, das die Spannung in jedem Stab zu finden erlaubt, und führte so zuerst die Spannungsberechnung mittels der Bewegungslehre durch.[4])

Denkt man sich einen Stab aus dem Fachwerk entfernt, so kann man das richtige Spannungsbild des Systems dadurch erhalten, daß man die wirkliche Spannung an beiden Stab-

---

[1]) Müller-Breslau, Schweiz. Bauztg. 1887, S. 121. — Statik d. Baukonstr., 2. Aufl., 1. Bd., 1887. — Vgl. auch Enzykl. d. math. Wissensch. IV, 5, S. 409. — Föppl, D. graph. Statik, 2. Aufl., S. 230.

[2]) Ztschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover 1874 u. 1875. — Zivilingenieur 1885 u. 1887. — Zentralbl. d. Bauverw. 1902 u. 1903. Abhdlgn. a. d. Geb. d. techn. Mech., S. 343, 431. Mohr gibt hier ein vollständiges Verfahren zur Berechnung von Spannungen mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen an, das bei den Raumfachwerken, § 17, besprochen wird. — Zur Übersicht über die Entwicklung kinematischer Untersuchungen dient eine im Zentralbl. 1903, S. 642 angegebene Zusammenstellung, bei der etwa noch zuzufügen wäre: Müller-Breslau, Anw. d. geom. Bew.-Lehre auf die Berechnung ebener Träger, Ztschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hann. 1880, S. 51; Grübler, Rig. Ind.-Ztg. 1887, S. 49 u. 1888, S. 278; Lang, Rig. Ind.-Ztg. 1889, S. 73.

[3]) Theorie d. Fachwerks 1880, S. 20.

[4]) Kurz nach dem Erscheinen der betreffenden Müller-Breslauschen Arbeit erschien die Abhandlung von Mohr, in der er ebenfalls die Aufgabe löste, aber ohne Benützung der lotrechten Verschiebungen.

enden als äußere Kraft einführt. Nur bei richtiger Stabspannung steht das ganze System im Gleichgewicht und man kann demgemäß für diese im Gleichgewicht befindlichen Kräfte die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, z. B. das Prinzip der virtuellen Verrückungen anwenden. Nach Fortnahme des Stabes entsteht, wie schon in § 1 ausgeführt, ein bewegliches System (von dem ein Stab festzuhalten ist) mit einem Freiheitsgrad; d. h. sobald man eine virtuelle (mögliche) Verrückung beliebig angenommen hat, sind alle anderen durch die Bedingungen des Systems bestimmt. Von einem System zusammengehöriger, virtueller Verrückungen mögen bezeichnet werden: die Verrückungen der Angriffspunkte der Kraft P_r in Richtung der Kraft mit δ_r, diejenige der Endpunkte des herausgenommenen Stabes S_{ik} in Richtung des Stabes mit Δ_i und Δ_k; dann liefert das erwähnte Prinzip die Gleichung:

$$S_{ik} \cdot (\Delta_i - \Delta_k) + P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 + \cdots P_n \cdot \delta_n = 0.$$

Der Wert $(\Delta_i - \Delta_k)$ drückt die Längenänderung Δs_{ik} des Stabes ik aus, so daß man schreiben kann:

$$S_{ik} \cdot \Delta s_{ik} + \sum_1^n P_r \cdot \delta_r = 0. \tag{15}$$

Da man unter virtueller Verrückung eine unendlich kleine Verschiebung zu verstehen hat, geht man mit Rücksicht auf die zeichnerische Darstellung zweckmäßig zu den endlichen Geschwindigkeiten über, mit denen die unendlich kleinen Wege in der unendlich kleinen, für alle Punkte gleichen Zeit dt durchlaufen werden, indem man alle Glieder der Gleichung 15 durch dt dividiert, entsprechend der Beziehung

$$v_r = \frac{ds_r}{dt}.$$

Der Maßstab zur Darstellung der Geschwindigkeiten ist ein beliebiger; es handelt sich nur darum, die Geschwindigkeiten aller Knotenpunkte nach Annahme einer einzigen zu finden, damit Gleichung 15 angewendet werden kann. Zu diesem Zweck benützt Müller-Breslau die „senkrechten Geschwindigkeiten“, die hervorragende Dienste leisten.

Wenn eine starre Scheibe (z. B. ein Stab) aus einer Lage in eine andere benachbarte übergeht, kann diese Bewegung aufgefaßt werden als eine Rotation um einen bestimmten Punkt P (= Pol). Die Verrückungen der einzelnen Punkte, also auch deren Geschwindigkeiten, stehen demgemäß senkrecht zu den einzelnen Polstrahlen, und diese Geschwindigkeiten ver-

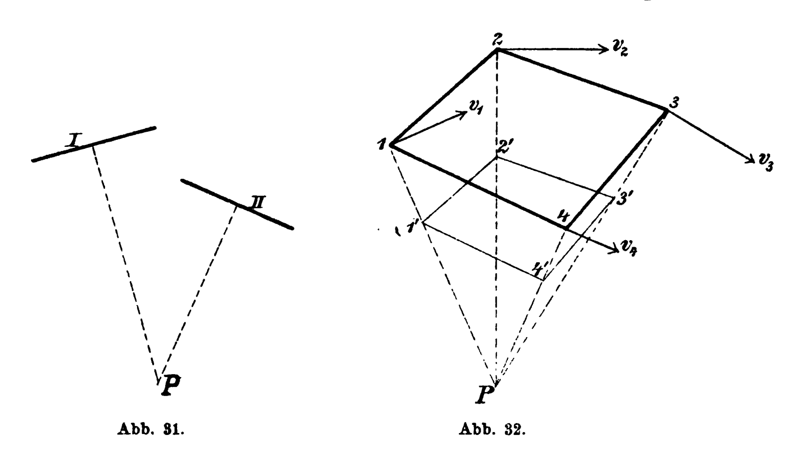


Abb. 31. Abb. 32.

halten sich wie die Längen der Radien, d. h. wie die Längen der Polstrahlen (Abb. 32):

$$v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = 1P : 2P : 3P : 4P.$$

Denkt man sich aus Zweckmäßigkeitsgründen diese wirklichen Geschwindigkeiten um 90° gedreht, so erhält man die „senkrechten Geschwindigkeiten“, die mit den Polstrahlen zusammenfallen. Durch die senkrechten Geschwindigkeiten und ihre Richtung sind natürlich auch die wirklichen Geschwindigkeiten gegeben, wenn man festsetzt, in welchem Drehungssinn man von den wirklichen Geschwindigkeiten zu den senkrechten übergegangen ist. Da $v_1 = 1\,1'$, $v_2 = 2\,2' \cdots$ ist, so besteht die Gleichung:

$$1\,1' : 2\,2' : \cdots = 1P : 2P = \cdots,$$

woraus folgt, daß die Linien $1'\,2'\,3' \cdots$ parallel laufen den ursprünglichen Seiten $1\,2\,3 \cdots$ einer starren Figur.

Die Bewegung von Systemen, die aus mehreren Scheiben zusammengesetzt sind, kann man auch leicht verfolgen und erkennt hierbei besonders die Vorteile, die durch Einführung der senkrechten Geschwindigkeiten erlangt sind. Mit Rücksicht darauf, daß das Müller-Breslausche Verfahren bei den Raumsystemen in diesem Buche einigemale Verwendung finden wird, soll dasselbe noch eingehend an dem Fachwerk mit sechs Knotenpunkten gezeigt werden, das bereits in § 1 angeführt wurde.

Um die Spannung des Stabes 36 (Abb. 33) zu bestimmen, denke man sich denselben entfernt; der Stab 12 möge festgehalten werden. Die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte sind festzustellen, nachdem man die Größe für eine derselben, z. B. v_4, angenommen hat. Die Richtung dieser Geschwindigkeit ist durch die Bedingungen des Systems bestimmt: Punkt 4 kann sich nur auf einem Kreisbogen um 1 mit der Länge 14 als Radius bewegen; die senkrechte Geschwindigkeit fällt also in die Richtung 41. Sie möge zu 44′ angenommen werden. Mit dieser Annahme sind alle anderen Geschwindigkeiten bestimmt, so z. B. diejenige von 3 aus der Bedingung, daß die Linie 4′3′//43 laufen muß (da 43 ein starrer Stab), und daß die senkrechte Geschwindigkeit 33′ auf dem Stab 32 liegen muß (da 3 sich auf einem Kreis um 2 bewegen wird). Es schneidet demgemäß die durch 4′ zu 43 gezogene Parallele auf 32 die senkrechte Geschwindigkeit 33′ ab. Von 4′ aus kann man zum entsprechenden Punkt 5′ gelangen mittels der zu 45 parallel verlaufenden Linie 4′5′ und erhält schließlich noch den Punkt 6′.

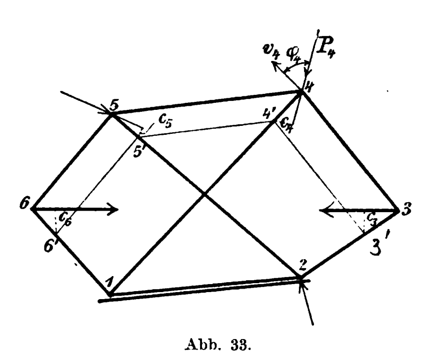


Abb. 33.

Nachdem so ein System zusammengehöriger virtueller Verrückungen gefunden ist, kann die Gleichung des Prinzips aufgestellt werden. Bildet irgend eine Kraft Q_r (z. B. P_4) mit der

wirklichen Verrückung ds_r des Angriffspunktes den Winkel φ_r, so hat man für eine Reihe von Kräften:

$$\Sigma\, Q_r \cdot ds_r \cdot \cos\varphi_r = 0 = dt \cdot \Sigma\, Q_r \cdot v_r \cdot \cos\varphi_r,$$

$$\Sigma\, Q_r \cdot v_r \cdot \cos\varphi_r = 0.$$

Nun liegen ja tatsächlich nicht die wirklichen Geschwindigkeiten vor, sondern die senkrechten rr' und es ist:

$$v_r \cdot \cos\varphi_r = rr' \cdot \cos\varphi_r,$$

so daß an die Stelle der Werte $v_r \cdot \cos\varphi_r$ jedesmal der Abstand c_r des Punktes r' von der Kraftrichtung einzuführen ist; denn nach der Abb. 33 ist ja:

$$c_r = rr' \cdot \cos\varphi_r.$$

Wird diese Erwägung auf vorliegendes Beispiel angewendet, so ergibt sich, wenn S_{36} die Spannung im fortgedachten Stab 3 6 bedeutet:

$$S_{36} \cdot c_6 - S_{36} \cdot c_3 + \Sigma\, P_r \cdot c_r = 0,$$

oder:

$$S_{36} \cdot (c_3 - c_6) = \Sigma\, P_r \cdot c_r.$$

Die Größen c_r sind proportional den Komponenten der wirklichen Verschiebung in der Kraftrichtung, die in Gleichung 15 mit δ_r bezeichnet wurden, und demgemäß stellt $(c_3 - c_6)$ die Längenänderung Δs_{ik} des Stabes 3, 6 dar.

Die kinematische Methode erlaubt hiernach, in einfacher Weise irgend eine Spannung als eine Funktion der äußeren Kräfte darzustellen, indem sich allgemein ergibt:

$$S_{ik} = p_1 \cdot P_1 + p_2 \cdot P_2 + \cdots + p_n \cdot P_n. \qquad (16)$$

Das Verfahren kann demgemäß sehr gut verwendet werden, um die so überaus wichtigen Einflußlinien zu konstruieren. Die Koeffizienten der Kräfte werden als Einflußzahlen bezeichnet; der Zusammenhang derselben mit den Verrückungen der Punkte ist durch die Beziehung festgelegt:

$$p_r = \frac{\delta_r}{\Delta s_{ik}}. \qquad (17)$$

Man kann die Gleichung 15 auch in anderer Weise ableiten, doch möge davon an dieser Stelle abgesehen werden; sie stellt eine gewisse Momentengleichung dar, von der die gewöhnliche Gleichgewichtsbedingung (Summe der Momente für einen bestimmten Punkt muß verschwinden) einen speziellen Fall bedeutet.[1])

20. Ist $(c_6 - c_3) = 0$, so ist die Spannung S_{36}, wie aus obiger Gleichung hervorgeht, entweder unendlich groß oder vieldeutig, also das System ist nicht statisch sicher. Sofern das System bestimmt sein soll, darf demnach die Verbindungslinie $6'3'$ nicht parallel der Linie $6\,3$ laufen. Mit Hilfe dieser kinematischen Methode kann man leicht nachweisen, daß das Sechseck kein Pascalsches Sechseck sein darf, sofern das System starr sein soll.[2]) Das in § 1 gefundene labile System (Abb. 8) ist ein spezieller Fall des Pascalschen Sechsecks, indem die sechs Punkte auf einem Kreis gelegen sind.

Man erkennt, daß dies kinematische Verfahren ein Kennzeichen für nicht stabile Fachwerke ergibt, ebenso wie die Methode mittels Stabvertauschung.

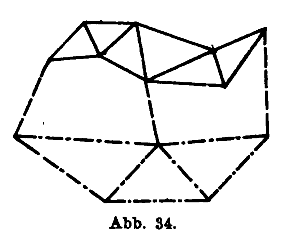
Weitere kinematische Untersuchungen in dieser Frage stellten Grübler[3]) und Lang[4]) an.

§ 7. Gestützte ebene Systeme (Ebene Fachwerksträger).

21. In den vorhergehenden Paragraphen wurde nur von freien Fachwerken gesprochen. Damit dieselben als Tragkonstruktionen Verwendung finden können, müssen sie gegenüber der festen Erde eine unverschiebliche Lage erhalten, oder aufgelagert werden. Da die Erde ein starrer Körper ist, so kann sie durch ein beliebiges starres Fachwerk ersetzt werden, das als Erdfachwerk bezeichnet werden möge. Da nun das Tragfachwerk gegen die Erde festgelegt sein muß, ist dasselbe mit dem

[1]) Müller-Breslau, Statik d. Baukonstr., 2. Aufl. 1887, S. 206.
[2]) Müller-Breslau, Statik d. Baukonstr., Bd. I, 2. Aufl., S. 208.
[3]) Rig. Ind.-Ztg. 1887 u. 1888.
[4]) Rig. Ind.-Ztg. 1889.

Erdfachwerk so zu verbinden, daß das hierdurch entstehende Gesamtsystem (erweitertes System) wiederum stabil ist, also ein starres Fachwerk ergibt.[1]) Nun sind aber drei Stäbe erforderlich, um zwei stabile Systeme miteinander zu einem einzigen starren Fachwerk zu vereinen, also sind auch drei Stäbe (Stützungsstäbe) nötig, um ein freies Fachwerk als Tragkonstruktion gegen die Erde festzulegen (Abb. 34).[2]) Das Erdfachwerk kann beliebig angeordnet werden, ist nur an die Bedingung gebunden, daß die Stützungsstäbe von seinen Knotenpunkten auslaufen, da erstere ja von völlig festen Stellen ausgehen müssen und anderenfalls an auf Biegung beanspruchten Punkten befestigt wären.


Abb. 34.

Nun wird aber gewöhnlich ein Fachwerk nicht durch derartige Stützungsstäbe gegen die Erde festgelegt, sondern es werden Auflager verwendet. Durch die äußeren Lasten, die nun an keine Bedingung gebunden sind, werden an den Lagerstellen Drücke auf das Mauerwerk ausgeübt, demgemäß entstehen gegen den Träger Reaktionen. Diese Reaktionen hat man so zu bestimmen, daß sie mit den Lasten Gleichgewicht halten, und gelangt so wieder auf ein freies Fachwerk. Der Zusammenhang zwischen diesen Lagern und den Stützungsstäben ist leicht zu erkennen. Der Punkt A (Abb. 35) ist durch zwei Stützungsstäbe mit der Erde fest verbunden, hat hierdurch eine unverschiebliche Lage, stellt also ein festes Lager dar. Der Punkt B kann sich auf einem Kreise bewegen, der um β mit βB beschrieben ist. Denkt man sich den Stab genügend lang, so bewegt sich B auf einem flachen

---

[1]) Henneberg-Schlink, Ztschr. f. Arch. u. Ingw. 1903, S. 157. — Föppl, D. Fachw. i. R., 1892, S. 5. — Föppl, D. graph. Statik, 1. Aufl., S. 245 u. 273. — Müller-Breslau, Zentralbl. d. Bauverw. 1891, S. 440. — G. Lang, Rigaer Ind.-Ztg. 1889.

[2]) Die gestrichelten Linien geben Stützungsstäbe, die strichpunktierten dagegen Erdfachwerksstäbe an.

Kreisbogen, der innerhalb der kleinen Bewegungsmöglichkeit, die B praktisch hat, durch die Tangente ersetzt werden kann. Es würde hiernach der Stützungsstab $B\beta$ einem beweglichen Lager mit der Gleitrichtung senkrecht zu $B\beta$ entsprechen.

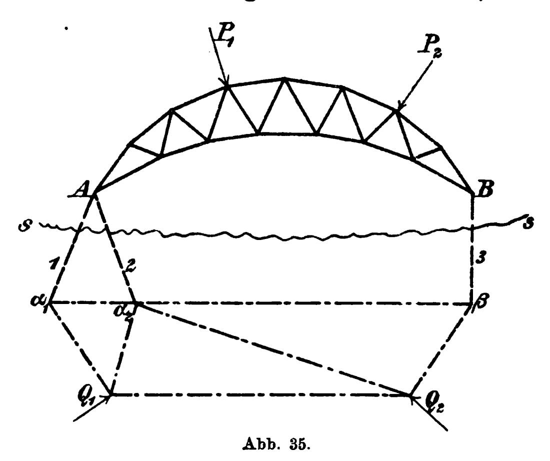


Abb. 35.

Demnach kann ein festes Lager entsprechend den zwei Lagerbedingungen stets durch zwei Stützungsstäbe ersetzt werden, die nicht in einer Geraden, sonst aber beliebig liegen dürfen; das bewegliche Lager der einen Lagerbedingung gemäß durch einen Stützungsstab senkrecht zur Gleitrichtung des Lagers.

Gewöhnlich wird ein Träger gelagert mittels eines festen und eines beweglichen Lagers. Es können aber auch drei bewegliche Lager (drei einzelne Stäbe) eintreten, doch sind hierbei spezielle Lagen zu vermeiden, z. B. dürfen dieselben nicht parallele Gleitrichtung besitzen, also nicht alle in derselben Auflagerebene liegen. Das geht daraus hervor, daß das hierdurch gegebene erweiterte System nicht stabil ist, da alle drei Stützungsstäbe durch denselben (unendlich fernen) Punkt gehen. Das System würde bei Stützungsstäben in sich zusammenklappen, bei Lagern einfach fortrollen.

22. Es ist einleuchtend, daß das erweiterte System jederzeit durch den entsprechenden Fachwerksträger ersetzt werden kann

und umgekehrt. Jeder stabile Fachwerksträger kann in ein stabiles erweitertes System umgewandelt werden, und aus jedem starren erweiterten System läßt sich ein stabiler Fachwerksträger herstellen.

In dem erweiterten System können nun die verschiedensten Stabvertauschungen zwischen Stützungsstäben und Tragfachwerksstäben vorgenommen werden. Aus dem Erdfachwerk darf man keinen Stab entfernen, da ja dasselbe unter allen Umständen für sich ein statisch bestimmtes Fachwerk darstellen muß. Bei diesen Stabvertauschungen bleibt demnach die Anzahl s der Tragfachwerksstäbe vermehrt um diejenige r der Stützungsstäbe (Lagerbedingungen) stets dieselbe. Da nun im einfachsten Fall nach Abb. 35 die Anzahl $s = 2n - 3$ ist und $r = 3$, so hat man:

$$s + r = 2n; \tag{18}$$

die konstante Zahl hat also den Wert $2n$, so daß hiermit gefunden ist: Die Zahl der Stäbe eines statisch bestimmten Fachwerksträgers vermehrt um die Anzahl der Stützungsstäbe (Auflagerbedingungen) ist stets gleich der doppelten Knotenpunktzahl.[1])

Indem man von einem Fachwerk in spezieller Anordnung ausgeht, dasselbe durch drei Stützungsstäbe mit dem Erdfachwerk verbindet und dann zweckmäßige Stabvertauschungen vornimmt, kann man alle möglichen statisch bestimmten Fachwerksträger ableiten.[2])

23. Will man die Spannungen in einem Fachwerksträger mit Hilfe des erweiterten Systems finden, so hat man zu bedenken, daß die wirkenden Lasten P_i für sich allein noch kein Gleichgewichtssystem bilden. Es muß zunächst Gleichgewicht hergestellt werden, und zwar dadurch, daß man in beliebigen Knotenpunkten des Erdfachwerks solche Kräfte Q_i einführt, deren Resultante derjenigen von P_i gleich

---

[1]) Mohr, Ztschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hann. 1874. — Levy, La statique graphique, Paris 1874, S. 50, 93.

[2]) Schlink, Ztschr. f. Arch. u. Ingw. 1903, S. 165 u. 397.

und entgegengesetzt gerichtet ist. Am einfachsten werden demgemäß nur zwei Kräfte Q_i benützt. Nach einem von Henneberg[1]) aufgestellten Satz bleiben die Spannungen des Tragfachwerks und der Stützungsstäbe bei einer bestimmten Belastung immer die gleichen, wie man auch das den Kräften P_i entgegengesetzte System der Q_i einführt. Daß dieser Satz richtig ist, läßt sich leicht einsehen. Denkt man sich nämlich einen Schnitt *ss* gelegt durch die Stützungsstäbe (Abb. 35), so erhält man zwei Teile, von denen jeder für sich ein Gleichgewichtssystem mit seinen sämtlichen angreifenden Kräften darstellen muß. Es müssen demnach mit Rücksicht auf den oberen Teil die Kräfte P_i mit den Spannungen der Stützungsstäbe Gleichgewicht halten; diese und damit die Stabkräfte im Tragfachwerk hängen also nur von den gegebenen Lasten P_i ab. Andererseits müssen die Kräfte Q_i mit den durch die P_i bewirkten Spannungen der Stützungsstäbe im Gleichgewicht stehen (infolge des Teiles unterhalb *ss*), sind also so zu wählen, daß sie sich mit diesen Spannungen und demgemäß mit den P_i aufheben, können aber im übrigen ganz willkürlich sein.

Dadurch, daß in Ersetzung der Auflager durch die Stützungsstäbe, sowie in Anordnung des Erdfachwerks und schließlich in Einführung der Kräfte Q_i große Willkür herrscht, kann man die Spannungsermittlung auf Grund des erweiterten Systems zweckmäßig und einfach gestalten.[2])

[1]) Ztschr. f. Arch. u. Ingw. 1903, S. 157.

[2]) Schlink, Ztschr. f. Arch. u. Ingw. 1903, S. 397.

Zweites Kapitel.

Zerlegung einer Kraft in Richtungen im Raume.

§ 8. Die Richtungslinien gehen durch einen Punkt. — Graphische Verfahren.

24. Bei den ebenen Fachwerken sind die zwei wichtigsten Bildungsgesetze dadurch gekennzeichnet, daß ein Punkt durch zwei Stäbe, die nicht in derselben Richtung liegen, angeschlossen wird, oder daß zwei stabile Systeme durch drei Stäbe verbunden werden, die sich nicht schneiden. Derartige Systeme sind sicher statisch bestimmt, da eine Kraft in zwei sich schneidende Richtungen oder in drei sich nicht schneidende Linien einer Ebene eindeutig zerlegt werden kann. Für die Raumfachwerke werden entsprechende Bildungsgesetze in Frage kommen, und es ist demgemäß zunächst festzustellen, wieviel sich schneidende und wieviel sich nicht schneidende Linien müssen und dürfen vorliegen, damit eine beliebige Kraft mit Kräften in diesen Linien eindeutig Gleichgewicht hält, oder, was im wesentlichen auf dasselbe hinauskommt, damit man eine beliebige Kraft in die gegebenen Richtungen eindeutig zerlegen kann. Der Unterschied zwischen Zerlegung und Gleichgewicht ist nur der, daß die Kräfte in den Richtungslinien (Kraftkomponenten) entgegengesetzte Richtung erhalten. Mit Rücksicht auf die kürzere Ausdrucksweise wird öfters, wenn es angängig erscheint, von Zerlegung gesprochen werden.

Wenn eine Reihe von Kräften mit demselben Angriffspunkt im Raume im Gleichgewicht stehen soll, müssen drei Bedingungsgleichungen erfüllt sein, (etwa: die Summe der Kraftkomponenten in drei zueinander senkrechten Richtungen muß verschwinden). Mit Rücksicht auf die drei aufstellbaren Gleichungen dürfen nur drei unbekannte Kräfte auftreten, d. h. eine Kraft kann nur in drei in einem Punkt zusammentreffende im Raume verteilte Linien, bezw. Stäbe, eindeutig zerlegt werden, oder mit Kräften in drei Linien

Gleichgewicht halten. Es ist sofort ersichtlich, daß die drei Richtungen nicht in einer Ebene liegen dürfen, da ja alsdann nur zwei Bedingungen zur Verfügung stehen, die Lösung also vieldeutige oder unendlich große Werte liefert.

Entsprechend ist ein System von drei sich schneidenden Stäben nur dann kinematisch bestimmt, also unverschieblich, wenn die drei Stäbe nicht in einer Ebene liegen.[1]) Wären bloß zwei Stäbe vorhanden (Abb. 36), z. B. AO und BO, so könnte sich O um die Linie AB drehen, dagegen wird die Bewegung durch Einfügung des dritten Stabes OC aufgehoben. Liegen

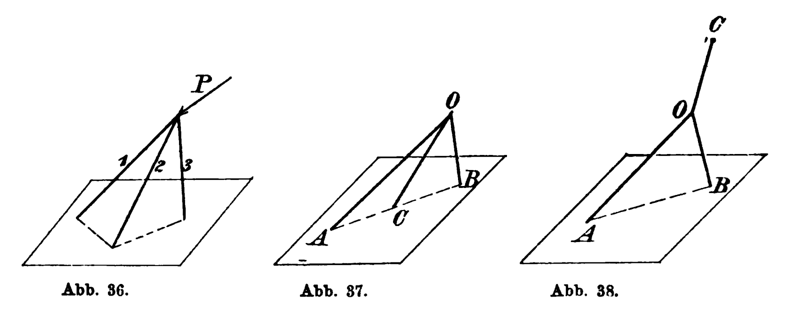


Abb. 36. Abb. 37. Abb. 38.

die drei Stäbe in einer Ebene, so ist noch Bewegung möglich, und zwar endliche oder unendlich kleine, je nachdem Anordnung nach Abb. 37 oder 38 vorliegt.[2]) Tatsächlich wird sich allerdings in letzterem Falle der Punkt infolge einer nicht in der Ebene der drei Stäbe liegenden Kraft bei den etwas nachgiebigen Stäben aus der Ebene um ein wenig verschieben, aber die Spannungen werden immer noch sehr groß, so daß dieser Fall als unbrauchbar zu bezeichnen ist.

25. Wie findet man nun die Größen der Kräfte in drei vorgeschriebenen Richtungslinien, die einer gegebenen Kraft Gleichgewicht halten sollen? Zur Lösung erscheint es am natürlichsten, davon auszugehen, daß die Komponenten einer Kraft P gegeben sind durch die drei Kanten eines Parallelepipeds, das

---

[1]) In den Punkten A, B, C denke man sich die Stäbe mit Gelenken befestigt.

[2]) Föppl, D. graph. Statik, 2. Aufl., S. 16.

durch P als Diagonale und die Komponentenlinien als Kantenrichtungen bestimmt ist. Um dieses Parallelepiped zu erhalten (Abb. 39), lege man durch den Endpunkt E der Kraft P eine Ebene ($EFDB$) parallel zu derjenigen, die durch zwei Kräfte, etwa 2 und 3, bestimmt ist. Der Schnittpunkt B dieser Ebene mit dem dritten Stab 1 ergibt den Endpunkt der einen Kante, damit die Größe der Kraft in Richtung 1. Die durch die gegebene Kraft AE und die durch E parallel zur Richtung 1 gezogene Linie bestimmte Ebene schneidet in der Ebene (2, 3) eine Linie R_{23} aus, die die Resultante von 2 und 3 darstellt. Die Zerlegung in diese Richtungen erfolgt mittels eines Kräfteparallelogramms, wodurch diese beiden Kräfte auch bestimmt sind. Man sucht also nach diesem Verfahren zunächst zwei Komponenten der gegebenen Kraft P, von denen die eine in Richtung eines Stabes 1, die andere in der Schnittlinie R_{23} der durch P und erstere Richtung bestimmten Ebene mit der Ebene der beiden anderen Stäbe fällt; oder kurz ausgedrückt: Die Kraft P ist zu zerlegen in Richtung eines Stabes und die Ebene der beiden anderen Stäbe. Die letzte Komponente ist dann in der Ebene (2, 3) weiter zu zerlegen in die Richtung 2 und 3. Im Gleichgewichtsfall ist der durch diese Zerlegung sich ergebende Richtungspfeil der drei Kräfte umzukehren.

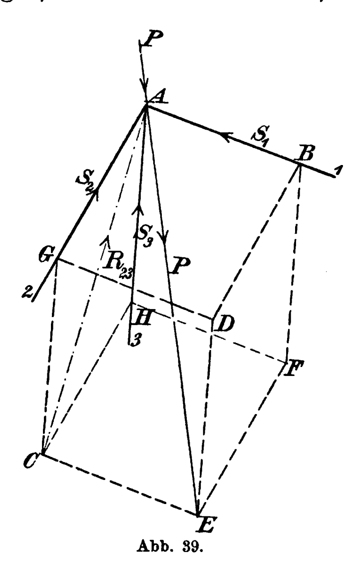


Abb. 39.

Um dieses Verfahren möglichst bequem zu gestalten, wird man die drei Richtungslinien auf dem Papier derartig legen, daß sich zwei derselben in einer Projektion überdecken, also die Ebene dieser beiden Richtungen senkrecht zur betreffenden Tafel steht.[1]

[1] Vgl. z. B. Föppl, D. graph. Statik, 2. Aufl., S. 9.

Zur Erläuterung mögen die folgenden Beispiele dienen, bei denen eine Kraft P mit drei Stabspannungen Gleichgewicht halten soll. Bei Dach- und besonders Brückenfachwerken kommt häufig der Fall vor, daß zwei der drei Stäbe in vertikaler Ebene liegen, der andere wagrecht, Abb. 40 und 41. Bei ersterer Stabverteilung steht Stab 1 senkrecht zur Ebene (2, 3). Man zerlegt die in beliebiger Richtung wirkende Kraft P im Aufriß oder Grundriß in zwei Komponenten in Richtung 1 und Ebene 2, 3 und erhält damit die wahre Größe S_1. Die andere Komponente R_{23} von P erblickt man im Seitenriß in wahrer Größe und kann demgemäß in dieser Tafel die weitere Zerlegung vornehmen, um die wirkliche Größe von S_2 und S_3 zu erhalten.

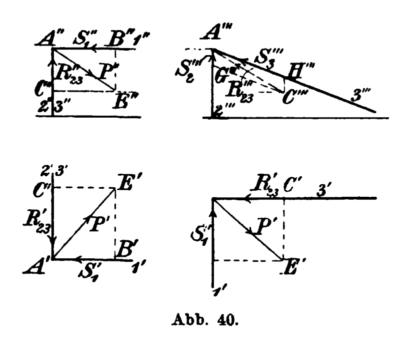


Abb. 40.

Ist 1 nicht senkrecht zur Ebene (2, 3) gerichtet (Abb. 41), so findet sich S_1 direkt aus dem Grundriß. Die wahre Größe der anderen Komponente R_{23} wird wiederum aus dem Seitenriß erhalten; der Endpunkt C''' ist durch die vorher bestimmten Punkte C'' und C' im Aufriß und Grundriß gegeben. Das Kräfteparallelogramm im Seitenriß liefert S_2 und S_3 in richtiger Größe.

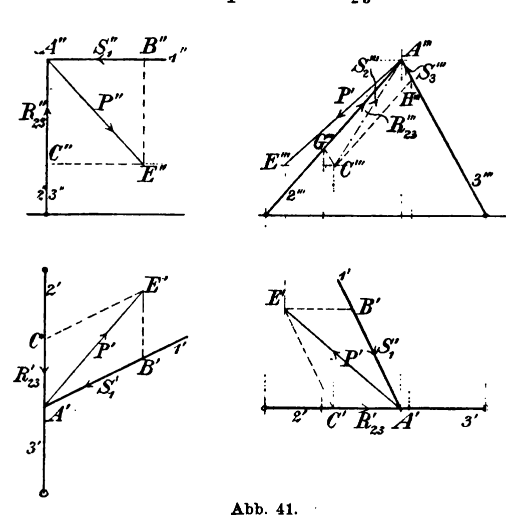


Abb. 41.

Eine andere Stabanordnung, die häufig vorkommt, ist in Abb. 42 dargestellt: zwei Stäbe laufen

horizontal, der dritte ist beliebig gerichtet. Man zerlege im Aufriß die Kraft P in Richtung 1 und Ebene (2, 3); S_1' im Grundriß ist damit sofort gegeben. R_{23}' findet sich aus der Überlegung, daß $R_{23} = AC$ auch gleich BE ist (vgl. Abb. 39), daß aber $B'E'$ im Grundriß sofort angegeben werden kann, da B der Endpunkt von S_1, E derjenige von P ist. Man zieht also im Grundriß durch A eine Linie $\#\ B'E'$, erhält damit den Punkt C', der sich senkrecht unter C'' ergeben muß. Der so ermittelte Wert R_{23}' liefert die Komponenten S_2' und S_3', die zugleich die wahre Größe von S_2 und S_3 darstellen. Die wirkliche Länge von S_1 ist in bekannter Weise aus Auf- und Grundriß zu bestimmen.

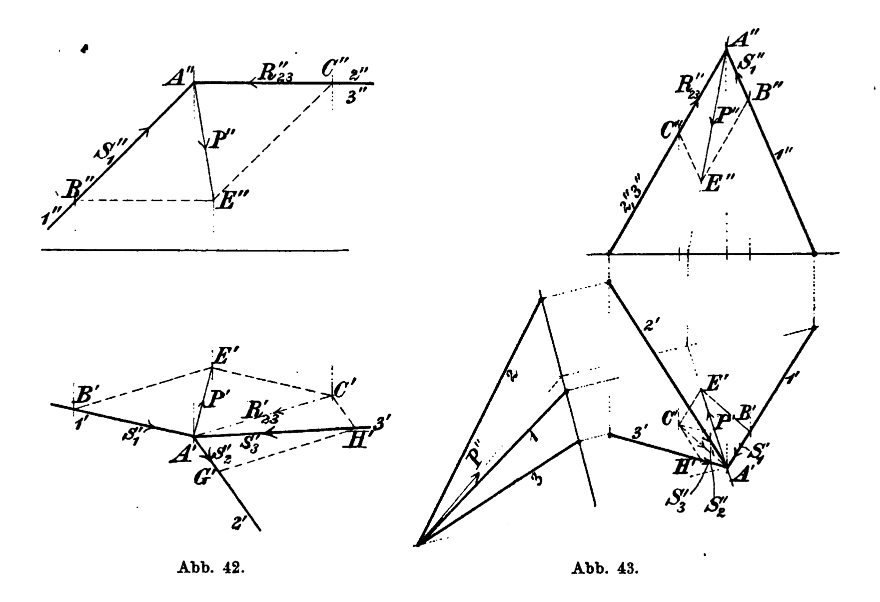


Abb. 42. Abb. 43.

Bei allgemeiner Lage der drei Stäbe (Abb. 43) dreht man, wie schon oben angegeben, das System zweckmäßig so, daß in einer Projektion sich zwei Stäbe decken, zerlegt in diesem Riß die Kraft P'' in zwei Komponenten S_1'' und R_{23}'', überträgt dann die Strecke $B''E''$ in den Grundriß, zieht durch A' zu ihr eine gleich große Parallele $A'C'$, die R_{23}' darstellt, und

findet mittels des Kräfteparallelogramms die Werte S_2' und S_3'. Nachdem dieselben im Grundriß (oder Seitenriß) bekannt sind, kann man sie in den Aufriß übertragen: S_2'' und S_3'', und hat dann schließlich aus zwei Tafeln nach üblichem Verfahren die wahre Länge von S_1, S_2 und S_3 zu ermitteln.

26. Die hier angegebene Methode, die im wesentlichen auf dem eigentlichen Grundsatz der Statik, dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte beruht, läßt an Einfachheit nichts zu wünschen übrig und ist vielfach zu empfehlen, jedoch bietet für allgemeine Fälle gewöhnlich das nun zu besprechende Culmannsche Verfahren übersichtlichere Figuren.[1])

Dasselbe beruht darauf, daß die Resultante von zwei Kräften durch den Schnittpunkt derselben geht und in deren Ebene liegt. Wenn die vier Kräfte P, S_1, S_2, S_3 im Gleichgewicht stehen sollen, muß die Resultante von zwei Kräften, z. B. P und S_1, gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sein derjenigen von den zwei anderen, also von S_2 und S_3. Die Resultante von P und S_1 liegt aber in der Ebene (1, P), deren Grundrißspur gegeben ist durch die Linie $A'D'$ (Abb. 44);

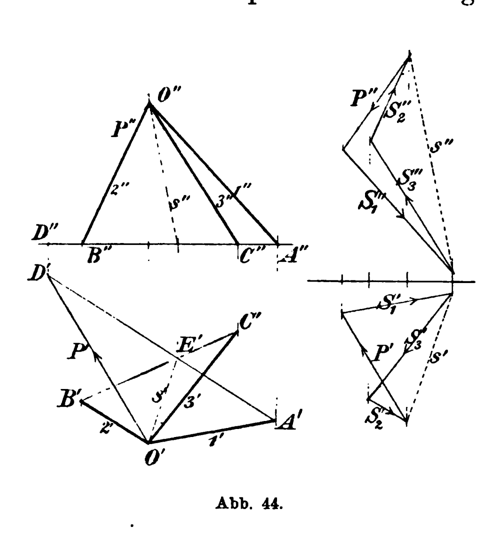


Abb. 44.

die Resultante von S_2 und S_3 in der Ebene (2, 3), deren Spur in die Linie $B'C'$ fällt. Da sich nun diese beiden Resultanten Gleichgewicht halten sollen, so müssen sie in derselben Linie liegen, und das ist nur möglich, wenn sie in die Schnittlinie beider Ebenen fallen. Diese Schnittlinie kann im Grundriß

---

[1]) Culmann, Graph. Statik.

sofort eingezeichnet werden, da sie den Punkt O' und den Schnittpunkt E' der beiden Grundrißspuren enthält, und ist dann in den Aufriß zu bringen. Sie stellt also die Linie der Resultanten sowohl von P, S_1, wie auch von S_2, S_3 dar. Damit ist die Methode von selbst gegeben: man stelle im Grundriß und Aufriß Gleichgewicht her zwischen der Kraft P, derjenigen in $OA\,(S_1)$ und $EO\,(s)$ und zerlege dann letztere in OB und OC, also in Richtung 2 und 3. Man erhält demgemäß im Grundriß und Aufriß Kräftepolygone, die unabhängig voneinander gezeichnet sind, und bekommt dadurch eine Kontrolle, indem der Umfahrungssinn des Vierseits in beiden Figuren derselbe sein muß und entsprechende Schnittpunkte übereinander liegen müssen. Bei Gleichgewicht am Punkte O stimmt der Umfahrungssinn von S_1, S_2, S_3 mit dem durch P gegebenen überein (Abb. 44), bei Zerlegung ist es umgekehrt. Aus Grund- und Aufriß ist schließlich noch die wahre Länge zu bestimmen.

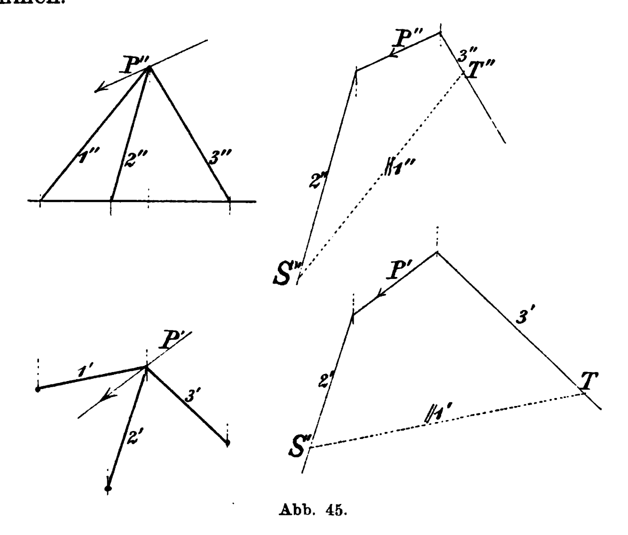


Abb. 45.

Ein weiteres zeichnerisches Verfahren rührt von Müller-Breslau her.[1]) Er sucht das geschlossene Kräfteviereck im

[1]) Zentralbl. d. Bauverw. 1891, S. 437. — Föppl, D. graph. Statik, S. 13.

Aufriß und Grundriß dadurch zu erhalten, daß er durch die Endpunkte von P Parallele zu zwei Stäben, etwa 2 und 3, zieht, Abb. 45, und dann die vierte Linie 1 derart anordnet, daß die Schnittpunkte S'', T'' der zu $1''$ parallel gezogenen Linie mit $2''$ und $3''$ im Aufriß senkrecht über S' und T' im Grundriß liegen. Ist eine solche Lage von 1 gefunden, so hat man offenbar das richtige Kräfteviereck erhalten. Um das Probieren zu umgehen, verwendet er den bekannten Satz: Wenn sich $(n-1)$ Eckpunkte eines n-Ecks je auf einer beliebigen Geraden bewegen, während alle Seiten des n-Ecks durch einen bestimmten Punkt gehen, oder also parallel laufen, so schreitet auch der n. Punkt auf einer Geraden fort.

Da die gewöhnliche Zerlegungsmethode und das Culmannsche Verfahren einfach und übersichtlich sind, möge von näherem Eingehen auf dieses Verfahren abgesehen werden.

§ 9. Analytische Methoden. — Allgemeines und Projektionsverfahren.

27. Außer den zeichnerischen Verfahren sind noch analytische zu erwähnen. Man könnte ja zunächst die graphische Behandlung ins Rechnerische übertragen und kommt hierdurch in vielen Fällen leicht zum Ziele, nachdem man sich die Kräftepläne flüchtig skizziert hat.[1]) Manchmal geht man auch zweckmäßig in der Weise vor, daß man die gegebene Kraft zunächst in andere Komponenten zerlegt und dann die durch diese Komponenten hervorgerufenen Stabspannungen bestimmt. Man zerlegt z. B. (Abb. 46) P in zwei Komponenten P' und P''; erstere liegt in der Ebene (1, 2) und wird nur in diesen beiden Stäben eine Spannung S_1' und S_2' hervorrufen. Die Komponente P'' zerlege man wiederum in zwei Komponenten in Richtung 3 und H; ersterer Wert gibt

---

[1]) Müller-Breslau, Die neueren Meth. d. Festigkeitslehre, 3. Aufl., Leipzig 1904, S. 272.

sofort S_3 an, während H weiter in Richtung 1 und 2 zu zerlegen ist und die Werte S_1'' und S_2'' liefern möge, die zusammen mit S_1' und S_2' die wirklichen Spannungswerte ergeben.

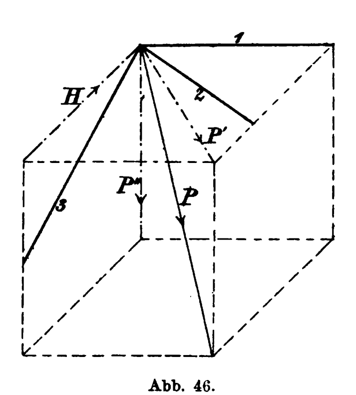


Abb. 46.

Besonders naheliegend ist weiter die Berechnung der Spannungen mit Hilfe der drei bekannten Gleichgewichtsbedingungen für den Schnittpunkt der drei Stäbe. Wenn man die Rechnung günstig ordnet und die Lösung mittels Determinanten ausführt, so gestaltet sich die Durchführung ganz übersichtlich.[1])

Sehr zweckmäßig erscheint es, zur analytischen Bestimmung von S_1, S_2, S_3 statt dieser drei Gleichungen mit je drei Unbekannten, drei Gleichungen mit nur je einer Unbekannten zu bilden, die dann direkt zu berechnen ist. Hierzu dienen die Projektions-, Momenten- und Mohrsche Methode.

28. Erstere beruht darauf, daß im Falle des Gleichgewichts die Summe aller Kraftkomponenten in einer beliebigen Richtung verschwinden muß.[2]) Will man nun eine der drei Kräfte ermitteln, so wählt man als betreffende Richtung die Senkrechte zur Ebene der beiden anderen Stäbe, zerlegt jede Kraft in eine Komponente in dieser Richtung und eine Senkrechte dazu; dann liefern die beiden letzteren Stabspannungen keinen Beitrag, und man erhält in der Tat nur eine Gleichung mit einer Unbekannten. Bildet etwa Kraft P mit der Normalen N_{23} zu 2 und 3 den Winkel π (Abb. 47), Stab S_1 mit derselben

---

[1]) Müller-Breslau, ebenda S. 258. — Vgl. auch S. 66 dieses Werkes.

[2]) Daß dies richtig ist, geht daraus hervor, daß im Falle des Gleichgewichts das räumliche Kräftepolygon geschlossen sein muß, also die Projektion desselben auf jede Linie den Wert Null liefert. Von zweckmäßig gewählten Richtungen machten Gebrauch Mohr (Zentralbl. 1902) und Müller-Breslau (Zentralbl. d. Bauv. 1903).

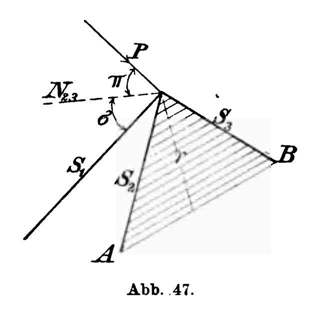


Abb. 47.

den Winkel σ, so ergibt sich (unter Zugrundelegung einer Zugspannung):

$$S_1 \cdot \cos \sigma = P \cdot \cos \pi. \qquad (19)$$

Als Beispiel diene die Stabanordnung nach Abb. 48, wobei S_1 berechnet werden soll. Das System sei festgelegt durch die angegebenen Zahlen; die Komponenten der Kraft mögen X, Y, Z genannt werden. Zur Berechnung von S_1 macht man davon Gebrauch, daß die Summe der Kraftkomponenten in Richtung senkrecht zu 2, 3 verschwinden muß. Um die nötigen Komponenten in dieser Richtung zu bilden, zerlege man S_1 in Teilkräfte in Richtung X, Y und Z:

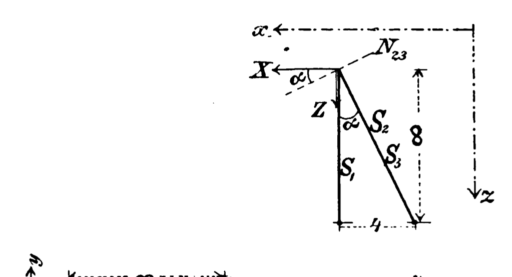


Abb. 48.

$${}_xS_1 = 0,$$
$${}_yS_1 = -S_1 \cdot \sin \beta,$$
$${}_zS_1 = S_1 \cdot \cos \beta,$$

so daß dann infolge der äußeren Kraft und S_1 in Richtung von X, Y, Z wirken:

$$\Xi = X,$$
$$H = Y - S_1 \cdot \sin \beta,$$
$$Z = Z + S_1 \cdot \cos \beta.$$

Da die Y-Richtung senkrecht zur Normalen N_{23} steht, liefert die Kraft $(Y - S_1 \cdot \sin \beta)$ keinen Beitrag. Von Ξ erhält man:

$$\Xi \cdot \cos \alpha = X \cdot \cos \alpha,$$

von Z:

$$Z \cdot \sin \alpha = (Z + S_1 \cdot \cos \beta) \sin \alpha,$$

so daß die Gleichung entsteht:

$$X \cdot \cos \alpha + Z \cdot \sin \alpha + S_1 \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha = 0.$$

Da nun nach der Figur 48:

$$\cos\alpha = \frac{8}{s_2}, \quad \sin\alpha = \frac{4}{s_2}, \quad \cos\beta = \frac{8}{s_1},$$

wenn s_1, s_2, s_3 die Längen der Stäbe 1, 2, 3 bedeuten, so erhält man:

$$8X + 4Z + 32 \cdot \frac{S_1}{s_1} = 0$$

oder:

$$2X + Z + 8 \cdot \frac{S_1}{\sqrt{3^2 + 8^2}} = 0.$$

Um allgemeine Gleichungen mittels des Projektionsverfahrens zu erhalten für eine Stabanordnung (Abb. 49), die durch Grundriß und Aufriß fest gelegt ist, führe man die Koordinaten der Endpunkte der Stäbe ein. Der Punkt O besitze die Koordinaten x_0, y_0, z_0; Punkt A: x_1, y_1, z_1, entsprechend Punkt B: x_2, y_2, z_2 und C: x_3, y_3, z_3. Zur Ermittelung von S_1 zerlege man die Kraft S_1 in drei Komponenten in Richtung X, Y, Z:

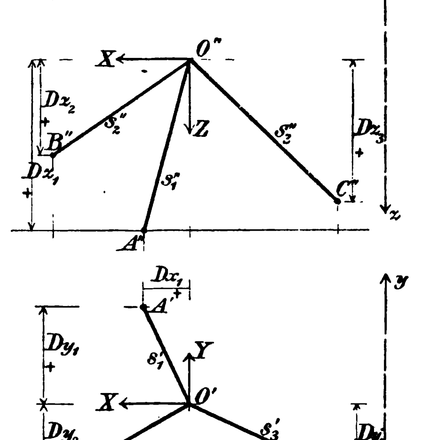


Abb. 49.

$$_xS_1 = \frac{S_1}{s_1} \cdot (x_1 - x_0)$$

$$_yS_1 = \frac{S_1}{s_1} \cdot (y_1 - y_0)$$

$$_zS_1 = \frac{S_1}{s_1} \cdot (z_1 - z_0),$$

wobei

$$s_1 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2},$$

so daß infolge äußerer Last und S_1 in der X-Richtung ein Beitrag wirkt:

$$\Xi = X + \frac{S_1}{s_1} \cdot (x_1 - x_0),$$

in Y-Richtung:

$$H = Y + \frac{S_1}{s_1} \cdot (y_1 - y_0),$$

in Z-Richtung:

$$Z = Z + \frac{S_1}{s_1} \cdot (z_1 - z_0).$$

Jede dieser drei Kräfte ist zu zerlegen in eine Komponente in der Normalen N_{23} zu den Stäben 2, 3 und eine solche senkrecht dazu. Die Summe der ersteren muß verschwinden:

$$\Xi \cdot \cos(\Xi, N_{23}) + H \cdot \cos(H, N_{23}) + Z \cdot \cos(Z, N_{23}) = 0.$$

Es ist nun:

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot \cos(\Xi, N_{23}) &= (z_2 - z_0) \cdot (y_3 - y_0) - (z_3 - z_0) \cdot (y_2 - y_0) \\
&= Dz_2 \cdot Dy_3 - Dz_3 \cdot Dy_2, \\
\lambda \cdot \cos(H, N_{23}) &= (x_2 - x_0) \cdot (z_3 - z_0) - (x_3 - x_0) \cdot (z_2 - z_0) \\
&= Dx_2 \cdot Dz_3 - Dx_3 \cdot Dz_2, \\
\lambda \cdot \cos(Z, N_{23}) &= (y_2 - y_0) \cdot (x_3 - x_0) - (y_3 - y_0) \cdot (x_2 - x_0) \\
&= Dy_2 \cdot Dx_3 - Dy_3 \cdot Dx_2.
\end{aligned}$$

Bei letzteren Gleichungen bedeutet λ einen Proportionalitätsfaktor und zur Abkürzung ist gesetzt:

$$\left.\begin{aligned}
(x_2 - x_0) &\equiv Dx_2 \qquad & (x_3 - x_0) &\equiv Dx_3 \\
(y_2 - y_0) &\equiv Dy_2 \qquad & (y_3 - y_0) &\equiv Dy_3 \\
(z_2 - z_0) &\equiv Dz_2 \qquad & (z_3 - z_0) &\equiv Dz_3 .
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Man erhält demgemäß für die Richtung N_{23} die Bedingungsgleichung:

$$\begin{aligned}
&\left\{X + \frac{S_1}{s_1} \cdot (x_1 - x_0)\right\} \cdot (Dz_2 \cdot Dy_3 - Dz_3 \cdot Dy_2) \\
+ &\left\{Y + \frac{S_1}{s_1} \cdot (y_1 - y_0)\right\} \cdot (Dx_2 \cdot Dz_3 - Dx_3 \cdot Dz_2) \\
+ &\left\{Z + \frac{S_1}{s_1} \cdot (z_1 - z_0)\right\} \cdot (Dy_2 \cdot Dx_3 - Dy_3 \cdot Dx_2) = 0
\end{aligned}$$

oder anders geschrieben:

$$\left.\begin{aligned}
&X \cdot (Dz_2 \cdot Dy_3 - Dz_3 \cdot Dy_2) \\
&+ Y \cdot (Dx_2 \cdot Dz_3 - Dx_3 \cdot Dz_2) \\
&+ Z \cdot (Dy_2 \cdot Dx_3 - Dy_3 \cdot Dx_2) \\
+ \frac{S_1}{s_1} &\left\{Dx_1 \cdot (Dz_2 \cdot Dy_3 - Dz_3 \cdot Dy_2)\right. \\
&+ Dy_1 \cdot (Dx_2 \cdot Dz_3 - Dx_3 \cdot Dz_2) \\
&\left.+ Dz_1 \cdot (Dy_2 \cdot Dx_3 - Dy_3 \cdot Dx_2)\right\} = 0 .
\end{aligned}\right\} \tag{21a}$$

Entsprechend finden sich zur Bestimmung von S_2 und S_3 die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&X \cdot (Dz_3 \cdot Dy_1 - Dz_1 \cdot Dy_3) \\
&+ Y \cdot (Dx_3 \cdot Dz_1 - Dx_1 \cdot Dz_3) \\
&+ Z \cdot (Dy_3 \cdot Dx_1 - Dy_1 \cdot Dx_3) \\
&+ \frac{S_2}{s_2} \Big\{ Dx_2 \cdot (Dz_3 \cdot Dy_1 - Dz_1 \cdot Dy_3) \\
&\quad + Dy_2 \cdot (Dx_3 \cdot Dz_1 - Dx_1 \cdot Dz_3) \\
&\quad + Dz_2 \cdot (Dy_3 \cdot Dx_1 - Dy_1 \cdot Dx_3) \Big\} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (21^b)$$

$$\left.\begin{aligned}
&X \cdot (Dz_1 \cdot Dy_2 - Dz_2 \cdot Dy_1) \\
&+ Y \cdot (Dx_1 \cdot Dz_2 - Dx_2 \cdot Dz_1) \\
&+ Z \cdot (Dy_1 \cdot Dx_2 - Dy_2 \cdot Dx_1) \\
&+ \frac{S_3}{s_3} \Big\{ Dx_3 \cdot (Dz_1 \cdot Dy_2 - Dz_2 \cdot Dy_1) \\
&\quad + Dy_3 \cdot (Dx_1 \cdot Dz_2 - Dx_2 \cdot Dz_1) \\
&\quad + Dz_3 \cdot (Dy_1 \cdot Dx_2 - Dy_2 \cdot Dx_1) \Big\} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (21^c)$$

Im betrachteten Zahlenbeispiel war (Abb. 48):

$$\begin{aligned}
Dx_1 &= 0 & Dx_2 &= -4 & Dx_3 &= -4 \\
Dy_1 &= -3 & Dy_2 &= 0 & Dy_3 &= +5 \\
Dz_1 &= +8 & Dz_2 &= +8 & Dz_3 &= +8,
\end{aligned}$$

so daß Gleichung 21^a liefert:

$$X(40 - 0) + Y \cdot (-32 + 32) + Z(0 + 20)$$
$$+ \frac{S_1}{s_1} \cdot \Big\{0 - 3 \cdot 0 + 8 \cdot 20\Big\} = 0,$$
$$2X + Z + \frac{S_1}{s_1} \cdot 8 = 0.$$

Man hat auf diese Weise Gleichungen gewonnen, die recht übersichtlich und für die Anwendung bequem sind, da die verschiedenen Werte Dx_i, Dy_i, Dz_i aus der Zeichnung sofort entnommen werden können, indem sie die Projektionen der Stablängen auf die x-, y-, z-Richtung darstellen.

29. Die Form der Gleichungen weckt sogleich den Gedanken, dieselben mit Determinanten in Verbindung zu bringen. Der

jedesmalige Koeffizient von $\frac{S_i}{s_i}$ ist ja offenbar, abgesehen vom Vorzeichen, der Wert der Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Dx_1 & Dx_2 & Dx_3 \\ Dy_1 & Dy_2 & Dy_3 \\ Dz_1 & Dz_2 & Dz_3 \end{vmatrix} \tag{22}$$

und die Koeffizienten der äußeren Kräfte X, Y, Z sind (bis aufs Vorzeichen!) die jeweiligen Unterdeterminanten der Glieder der ersten, bezw. zweiten und dritten Kolonne für S_1, S_2, S_3. Aus der Theorie der Determinanten ist aber bekannt, daß sich in dieser Weise die Lösungen von den drei folgenden, nichthomogenen Gleichungen darstellen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{S_1}{s_1}\,.\,Dx_1 + \frac{S_2}{s_2}\,.\,Dx_2 + \frac{S_3}{s_3}\,.\,Dx_3 + X = 0, \\ \frac{S_1}{s_1}\,.\,Dy_1 + \frac{S_2}{s_2}\,.\,Dy_2 + \frac{S_3}{s_3}\,.\,Dy_3 + Y = 0, \\ \frac{S_1}{s_1}\,.\,Dz_1 + \frac{S_2}{s_2}\,.\,Dz_2 + \frac{S_3}{s_3}\,.\,Dz_3 + Z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Alsdann ist ja gegeben:

$$\frac{S_1}{s_1} = \frac{\begin{vmatrix} -X & Dx_2 & Dx_3 \\ -Y & Dy_2 & Dy_3 \\ -Z & Dz_2 & Dz_3 \end{vmatrix}}{\Delta}\,.$$

$$\frac{S_2}{s_2} = \frac{\begin{vmatrix} Dx_1 & -X & Dx_3 \\ Dy_1 & -Y & Dy_3 \\ Dz_1 & -Z & Dz_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

und eine entsprechende Formel für S_3. Die Ausrechnungen liefern genau die Gleichungen 21.

Nun stellen aber die drei Gleichungen (23) nichts anderes dar, wie die Bedingungen, daß die Summe der Komponenten aller Kräfte in der X-, Y-, Z-Richtung verschwinden muß, indem:

$$\frac{Dx_1}{s_1} = \frac{x_1 - x_0}{s_1} = \cos\,(S_1, X),$$

$$\frac{Dy_1}{s_1} = \frac{y_1 - y_0}{s_1} = \cos\,(S_1, Y)\cdots$$

ist. Demnach sind die Lösungen der Projektionsmethode übereinstimmend mit denjenigen, die aus den drei allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen gefunden werden, ein Resultat, das sich natürlich ergeben mußte.

Man erkennt, daß man mit Leichtigkeit für jede der drei Spannungen eine Formel aufstellen kann, indem man einfach von der Determinante Δ ausgeht, die sich sofort hinschreiben läßt: der Nenner des Ausdrucks für S_i ist jedesmal die Determinante, der Zähler von S_1, S_2, S_3 enthält die Unterdeterminanten der Glieder der ersten, zweiten, dritten Kolonne, wobei natürlich das Vorzeichen derselben zu berücksichtigen ist. Nimmt man dasselbe jedesmal aus der Unterdeterminante heraus und bezeichnet die positiven Unterdeterminanten der einzelnen Glieder durch ein vorgesetztes Δ, so ergeben sich die einfachen, leicht zu behaltenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}\frac{S_1}{s_1} &= \frac{-X\cdot\Delta Dx_1 + Y\cdot\Delta Dy_1 - Z\cdot\Delta Dz_1}{\Delta},\\ \frac{S_2}{s_2} &= \frac{+X\cdot\Delta Dx_2 - Y\cdot\Delta Dy_2 + Z\cdot\Delta Dz_2}{\Delta},\\ \frac{S_3}{s_3} &= \frac{-X\cdot\Delta Dx_3 + Y\cdot\Delta Dy_3 - Z\cdot\Delta Dz_3}{\Delta},\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

wobei Δ z. B.:

$$\Delta = Dx_1\cdot\Delta Dx_1 - Dy_1\cdot\Delta Dy_1 + Dz_1\cdot\Delta Dz_1 .$$

Die verschiedenen in den Gleichungen auftretenden Werte lassen sich aus der Determinante sofort ablesen und so die drei Ausdrücke bilden. Für das Zahlenbeispiel (Abb. 48) ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -4\\ -3 & 0 & 5\\ 8 & 8 & 8\end{vmatrix} = 0\cdot(-40) + 3\cdot(-32+32) + 8\,.\,-20 = -160,$$

$$\frac{S_1}{s_1} = \frac{-X\cdot(-40) + Y\cdot(0) - Z\cdot(-20)}{-160} = \frac{-2X - Z}{8},$$

$$\frac{S_2}{s_2} = \frac{+X\cdot(-24-40) - Y\cdot(0+32) + Z\cdot(0-12)}{-160} = \frac{+16X + 8Y + 3Z}{40},$$

$$\frac{S_3}{s_3} = \frac{-X\cdot(-24-0) + Y\cdot(0+32) - Z\cdot(0-12)}{-160} = \frac{-6X - 8Y - 3Z}{40}.$$

Da man die Determinante $\varDelta$ auf verschiedene Weise berechnen kann, z. B. durch die Summe von den Produkten der Unterdeterminanten der Glieder irgend einer Reihe multipliziert mit diesen Gliedern, hat man bei diesen Lösungen eine Kontrolle. Ob die Elemente Dx_i, Dy_i, Dz_i positiv oder negativ sind, erkennt man sofort, wenn man sich eine Zugspannung im Stabe S_i wirkend denkt: Verläuft die Komponente der Zugspannung in der positiven x- (bezw. y-, z-) Richtung, so ist Dx_i (Dy_i, Dz_i) positiv, anderenfalls negativ.

Dieses allgemeine Verfahren ist vorteilhaft, wenn es sich um allgemeine Belastungen X, Y, Z handelt, weil die Gedankenarbeit sehr gering ist; es ist darum den weniger Geübten zu empfehlen. Die direkte Anwendung der Projektionsmethode für Zahlenbeispiele bietet bei manchen speziellen Stabanordnungen Vorteile, erfordert aber mehr Überlegung, wie schon das Beispiel auf S. 61 zeigte. Einfacher als diese erscheint zur Bestimmung der Spannungen in vielen Fällen die Momentenmethode, die überhaupt für die Raumfachwerke große Vorteile aufweist.

§ 10. Fortsetzung. Momenten- und Mohrsche Methode.

30. Wenn eine Reihe von Kräften — einerlei ob mit demselben oder verschiedenen Angriffspunkten im Gleichgewicht stehen soll — muß die Summe der Momente für jede beliebige Linie als Achse verschwinden. Man wählt nun bei Anwendung des Momentenverfahrens, entsprechend der Ritterschen Methode für die Ebene, die Momentenachse derart, daß in dem Ausdruck für das Moment nur eine Unbekannte auftritt.

Zunächst möge bei dieser Gelegenheit daran erinnert werden, wie man das Moment einer Kraft bezgl. einer Linie erhalten kann. Gewöhnlich geschieht dies in der Weise, daß man die Kraft zerlegt (Abb. 50) in eine Richtung parallel zur Achse und in eine solche, die in der durch die Kraft P und die Komponente P'' gegebenen Ebene senkrecht zu P'' verläuft, also P'. Die erste Komponente hat kein Moment,

die letztere dagegen liefert den Beitrag $P' \cdot a$. Dieses Moment wird auch dadurch gewonnen, daß man die Kraft auf eine Ebene E senkrecht zur Achse projiziert und in dieser Ebene für den Punkt O der projizierten Achse das ebene Moment der projizierten Kraft (d. i. ja P') aufstellt. Liegt eine Anzahl von Kräften vor, so ist das Verfahren entsprechend zu erweitern. Man erkennt hieraus allgemein, daß man das räumliche Moment einer Reihe von Kräften immer auf das einer Ebene überführen kann, indem man das Kräftesystem auf eine Ebene senkrecht zur Momentenachse projiziert.

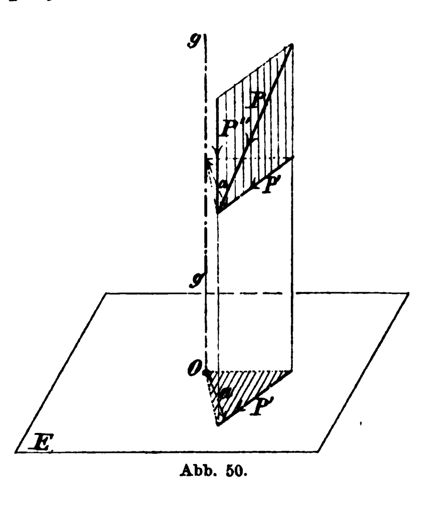


Abb. 50.

Es ist natürlich nicht nötig, daß man die Kraft auf die eben erwähnte Art in zwei Komponenten zerlegt. Man kann vielmehr die Zerlegung in irgend einer Weise derart vornehmen, daß die eine Komponente die Achse schneidet und so keinen Beitrag liefert. Die obige Zerlegungsweise ist ein spezieller Fall der letzteren, indem der Schnittpunkt der einen Komponente mit der Achse im Unendlichen liegt.

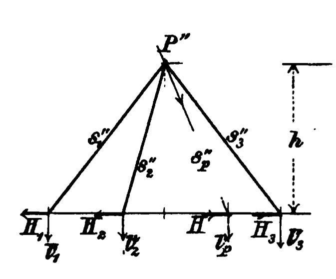
Bei der vorliegenden Aufgabe handelt es sich um drei unbekannte Spannungen. Will man das Moment einer dieser Kräfte finden, so lege man die Momentenachse so, daß sie die beiden anderen unbekannten Kräfte schneidet (also in der Ebene dieser beiden Kräfte liegt); dann liefern die letzteren kein Moment, da der Hebelarm Null ist. Man kann z. B. die Kraft S_1 (Abb. 47) in der Weise bestimmen, daß man P in zwei Komponenten zerlegt, von denen die eine in die Ebene (2, 3) fällt, die andere senkrecht dazu steht, ebenso S_1 in zwei derartige Komponenten, und das Moment für AB aufstellt. Sind die Winkel von P und S_1 mit dieser Senkrechten

π und σ und die Entfernung des Punktes O von AB gleich r, so hat man:

$$(P \cdot \cos \pi - S_1 \cdot \cos \sigma) \cdot r = 0.$$

Man ist also hiermit auf Gleichung (19) gekommen, was als selbstverständlich erscheint, da die Kraftzerlegung bei beiden Verfahren in gleicher Weise vorgenommen wurde.

In Abb. 51 ist der Fall dargestellt, daß die Stäbe und die Kraft P die Grundrißtafel in den Punkten A, B, C und D schneiden. Um S_1 zu finden, wählt man am bequemsten die Linie BC als Momentenachse und stellt das Moment dadurch auf, daß man die Kraft P, sowie S_1 in den Punkten D bezw. A in zwei Komponenten zerlegt, von denen die eine die Achse $BC\,(aa)$ schneidet, die andere senkrecht dazu verläuft;[1]) die eine Komponente nimmt man demgemäß am besten senkrecht zur Grundrißtafel an, die andere zusammenfallend mit dem Grundriß AO' bezw. DO'. Letztere Komponenten liefern zum Moment keinen Beitrag, wohl aber die ersteren, die im Abstand e_1, bezw. e_p von der Achse wirken. Wird



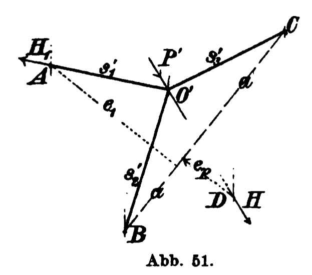


Abb. 51.

die Höhe des Punktes O über der Grundrißtafel mit h, die Länge der Stäbe $OA, \ldots, OC$ mit s_1, s_2, s_3 und die Strecke OD mit s_p bezeichnet, so sind die senkrechten Komponenten von S_1 und P gegeben durch

$$V_1 = S_1 \cdot \frac{h}{s_1} \qquad V_p = P \cdot \frac{h}{s_p}$$

und es ergibt sich mittels der Gleichung:

$$V_1 \cdot e_1 = V_p \cdot e_p$$

---

[1]) Müller-Breslau, Zentralblatt d. Bauverw. 1892. — Neuere Meth. d. Fertigkeitslehre, 3. Aufl., 1904, S. 261.

die Beziehung:

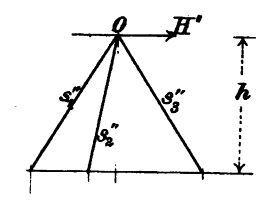
$$S_1 \cdot \frac{h}{s_1} \cdot e_1 = P \cdot \frac{h}{s_p} \cdot e_p$$

oder:

$$\frac{S_1}{s_1} = \frac{P}{s_p} \cdot \frac{e_p}{e_1}. \tag{25}$$

Statt der senkrechten Entfernungen e_p und e_1 kann man auch solche in ganz beliebigen, parallelen Richtungen einführen, da sich hierdurch das Verhältnis von $e_p : e_1$ nicht ändert; man wird demgemäß diese Richtungen möglichst bequem wählen. Für die anderen Kräfte S_2 und S_3 gelten ganz entsprechende Gleichungen. Daß man diese beiden Kräfte nach Ermittelung von S_1 auch dadurch finden kann, daß man die Resultante von P und S_1 in die zwei Richtungen 2 und 3 zerlegt, ist selbstverständlich.

Läuft die Kraft P horizontal $(= H)$, so kann man Formel (25) nicht benutzen. Dann zerlegt man am besten (Abb. 52) die Kraft H im Punkte O in eine Komponente parallel zu BC (H_p) und eine in der wagerechten Ebene senkrecht dazu (H_s). Ist der Winkel zwischen H und der Komponente H_p gleich α, so haben diese Komponenten den Wert:



$$H_p = H \cdot \cos \alpha,$$
$$H_s = H \cdot \sin \alpha.$$

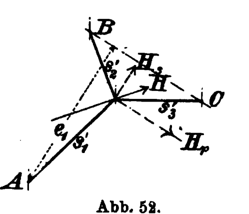


Abb. 52.

Nur letztere Komponente liefert einen Beitrag zum Moment und man hat die Gleichung:

$$\frac{S_1}{s_1} \cdot h \cdot e_1 = H \cdot \sin \alpha \cdot h.$$

Nennt man die Strecke zwischen A und der Linie BC auf der parallel zu H gezogenen Linie: e_1, dann ist: $e_1 = e_1' \cdot \sin \alpha$ und es ergibt sich:

$$\frac{S_1}{s_1} = \frac{H}{e_1'}. \tag{26}$$

Ist H parallel zur Achse BC gerichtet, so liegt H in der Ebene von S_2 und S_3, und es ist infolgedessen die Spannung $S_1 = 0$.

Liegt etwa der Stab 3 wagrecht, so wird als Momentenachse eine Linie eingeführt, die parallel zu 3 durch B gezogen ist. In anderen speziellen Fällen ist das Verfahren entsprechend zu variieren.[1]) Besonders vorteilhaft erscheint die Momentenmethode dann, wenn die unteren Endpunkte auf derselben horizontalen Ebene liegen, wie dies auch bei den hier durchgeführten Beispielen angenommen ist.

31. Es bleibt schließlich noch das Verfahren von Mohr zu erwähnen, der auf den losgelösten Punkt O mit den wirkenden Kräften das Prinzip der virtuellen Verrückungen als Gleichgewichtsbedingung anwendet, wonach die Arbeit aller Kräfte für eine der Größe und Richtung nach ganz beliebige Verschiebung δ verschwinden muß.[2]) Die Komponenten der Verschiebung, die also willkürlich gewählt werden können, seien ξ, η, ζ. Die einzelnen Kräfte: P, S_1, S_2, S_3 werden in Komponenten in den Koordinatenrichtungen zerlegt: X, Y, Z, ${}_xS_1$, ${}_yS_1, \ldots {}_zS_3$. Bezeichnen Ξ, H, Z die Summe aller dieser Kraftkomponenten in der x-, y-, z-Richtung, so lautet das Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$\Xi \cdot \xi + H \cdot \eta + Z \cdot \zeta = 0\,.$$

Die Koordinaten des Punktes O für ein beliebiges Achsensystem mögen wie bei der Projektionsmethode mit x_0, y_0, z_0 bezeichnet werden (Abb. 49), diejenige von A, B, C mit $x_1, y_1, z_1 \ldots, x_3, y_3, z_3$; die Längen der Stäbe seien s_1, s_2, s_3. Es ergibt sich alsdann:

$$\Xi = X + S_1 \cdot \frac{x_1 - x_0}{s_1} + S_2 \cdot \frac{x_2 - x_0}{s_2} + S_3 \cdot \frac{x_3 - x_0}{s_3}\,,$$

$$H = Y + S_1 \cdot \frac{y_1 - y_0}{s_1} + S_2 \cdot \frac{y_2 - y_0}{s_2} + S_3 \cdot \frac{y_3 - y_0}{s_3}\,,$$

$$Z = Z + S_1 \cdot \frac{z_1 - z_0}{s_1} + S_2 \cdot \frac{z_2 - z_0}{s_2} + S_3 \cdot \frac{z_3 - z_0}{s_3}\,,$$

---

[1]) Müller-Breslau, D. n. Meth. d. Fest., 3. Aufl., S. 261 ff.

[2]) Zentralbl. d. Bauverw. 1902 und 1903. — Abhdlgn. a. d. Geb. d. techn. Mech., Berlin 1906, S. 437. — Mehrtens, Statik d. Bauk., Bd. I, Leipzig 1903, § 13.

wobei positive Werte der Spannungen Zugspannungen darstellen. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen nimmt demgemäß die Form an:

$$\left.\begin{aligned} X\cdot\xi+Y\cdot\eta+Z\cdot\zeta+\frac{S_1}{s_1}\left\{(x_1-x_0)\cdot\xi+(y_1-y_0)\cdot\eta+(z_1-z_0)\cdot\zeta\right\} \\ +\frac{S_2}{s_2}\left\{(x_2-x_0)\cdot\xi+(y_2-y_0)\cdot\eta+(z_2-z_0)\cdot\zeta\right\} \\ +\frac{S_3}{s_3}\left\{(x_3-x_0)\cdot\xi+(y_3-y_0)\cdot\eta+(z_3-z_0)\cdot\zeta\right\}=0 \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Da es nur auf das Verhältnis der Verschiebungskomponenten ankommt (das die Richtung von δ festlegt), ist es zweckmäßig, einen der drei Werte, etwa ζ, gleich 1 zu setzen. Über die beiden anderen verfügt man dann derart, daß man die Unbekannten bequem berechnen kann. Will man z. B. S_1 bestimmen, so setzt man die Koeffizienten von S_2 und S_3 gleich Null, erhält damit zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} (x_2-x_0)\cdot\xi+(y_2-y_0)\cdot\eta+(z_2-z_0)\cdot 1=0, \\ (x_3-x_0)\cdot\xi+(y_3-y_0)\cdot\eta+(z_3-z_0)\cdot 1=0, \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

aus denen man ξ und η zu ermitteln und in

$$X\cdot\xi+Y\cdot\eta+Z\cdot\zeta$$
$$+\frac{S_1}{s_1}\cdot\left\{(x_1-x_0)\cdot\xi+(y_1-y_0)\cdot\eta+(z_1-z_0)\cdot\zeta\right\}=0$$

einzusetzen hat. Das Verschwinden der Koeffizienten von S_2 und S_3 in Gleichung (27) drückt aus, daß diese beiden Spannungen keine Arbeit leisten, da sie ja alsdann in der Arbeitsgleichung nicht mehr vorkommen. Man kann also sagen: Zur Ermittelung von S_1 wählt man ξ, η so, daß S_2 und S_3 keine Arbeit leisten.

Zur Erläuterung des Verfahrens diene die Stabanordnung nach Abb. 48, bei der:

$$Dx_1\equiv x_1-x_0=0,\quad Dx_2\equiv x_2-x_0=-4,\quad Dx_3\equiv x_3-x_0=-4,$$
$$Dy_1\equiv y_1-y_0=-3,\quad Dy_2\equiv y_2-y_0=0,\quad Dy_3\equiv y_3-y_0=+5,$$
$$Dz_1\equiv z_1-z_0=+8,\quad Dz_2\equiv z_2-z_0=+8,\quad Dz_3\equiv z_3-z_0=+8.$$

Die Gleichungen (28) lauten dann:

$$-4 \cdot \xi + 0 \cdot \eta + 8 = 0,$$
$$-4 \cdot \xi + 5 \cdot \eta + 8 = 0,$$

aus denen sich ergibt:

$$\xi = 2, \qquad \eta = 0.$$

Für S_1 erhält man damit nach Gleichung (27):

$$2X + 0 \cdot Y + Z + \frac{S_1}{s_1} \cdot 8 = 0.$$

Den Wert S_2 würde man mittels Gleichung (27) gewinnen, indem man zunächst die Koeffizienten von S_1 und S_3 gleich Null setzt:

$$0 \cdot \xi - 3 \cdot \eta + 8 = 0,$$
$$-4 \cdot \xi + 5 \cdot \eta + 8 = 0,$$

woraus folgt:

$$\xi = \frac{16}{3}, \qquad \eta = \frac{8}{3}.$$

Demgemäß ist:

$$\frac{16}{3} X + \frac{8}{3} Y + Z + \frac{S_2}{s_2} \cdot \left(-\frac{64}{3} + 0 + 8\right) = 0.$$

Die Mohrsche Methode bietet, wie die allgemeine Methode auf S. 65, 66 den wesentlichen Vorteil, daß man ohne besondere Gedankenarbeit ganz schematisch die Aufgabe lösen kann, indem man von der allgemeinen Gleichung (27) ausgeht und bedenkt, daß die Koeffizienten von ξ, η, ζ in den Klammerausdrücken mit den früher benützten Werten Dx_1, $Dy_1 \cdots$ übereinstimmen, also die Projektionen der drei Stablängen auf die x-, y-, z-Richtung darstellen. Um S_1 zu finden, benütze man die zweite und dritte der folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} Dx_1 \cdot \xi + Dy_1 \cdot \eta + Dz_1 = 0, \\ Dx_2 \cdot \xi + Dy_2 \cdot \eta + Dz_2 = 0, \\ Dx_3 \cdot \xi + Dy_3 \cdot \eta + Dz_3 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

in Verbindung mit Ausdruck (27):

$$\left.\begin{aligned} X \cdot \xi + Y \cdot \eta + Z \cdot \zeta + \frac{S_1}{s_1}(Dx_1 \cdot \xi + Dy_1 \cdot \eta + Dz_1 \cdot \zeta) \\ + \frac{S_2}{s_2}(Dx_2 \cdot \xi + Dy_2 \cdot \eta + Dz_2 \cdot \zeta) \\ + \frac{S_3}{s_3}(Dx_3 \cdot \xi + Dy_3 \cdot \eta + Dz_3 \cdot \zeta) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (27^a)$$

zur Ermittlung von S_2 die erste und dritte Gleichung und zur Gewinnung von S_3 die erste und zweite Gleichung, ebenfalls in Verbindung mit Gleichung (27^a).

Die im Zahlenbeispiel für S_1 gewonnene Gleichung stimmt mit derjenigen, die bereits bei der Projektionsmethode erhalten wurde, überein. Inwieweit besteht nun ein allgemeiner Zusammenhang zwischen diesen beiden Verfahren? Das Wesen der Mohrschen Methode liegt offenbar vor allem in denjenigen Bedingungen, die aus der allgemeinen Gleichung (27) zu den drei Gleichungen mit je einer Unbekannten führen. Diese waren aber: Zur Ermittlung einer Spannung, etwa S_1, sind die Verrückungen $\xi, \eta, \zeta = 1$ so zu wählen, daß die anderen Spannungen, S_2, S_3, keine Arbeit leisten. Diese leisten aber dann keine Arbeit, wenn die Gesamtverschiebung δ senkrecht zu der Ebene der beiden Kräfte S_2, S_3 verläuft, also es sind ξ, η, ζ so zu bestimmen, daß ihre Resultante senkrecht zu (2, 3) gerichtet ist. Diese Bedingung deckt sich aber vollständig mit derjenigen, daß die Summe aller Komponenten in dieser Richtung verschwindet: und das war das Wesen des Projektionsverfahrens.

Wird die Mohrsche Methode zur allgemeinen Durchführung der Aufgabe benützt, so muß sie natürlich wiederum zu den Gleichungen (21) führen. Das stimmt in der Tat: Die Gleichungen (28) liefern:

$$\xi = \frac{(z_2 - z_0) \cdot (y_3 - y_0) - (z_3 - z_0) \cdot (y_2 - y_0)}{(y_2 - y_0) \cdot (x_3 - x_0) - (y_3 - y_0) \cdot (x_2 - x_0)} = \frac{Dz_2 \cdot Dy_3 - Dz_3 \cdot Dy_2}{Dy_2 \cdot Dx_3 - Dy_3 \cdot Dx_2},$$

$$\eta = \frac{(x_2 - x_0) \cdot (z_3 - z_0) - (x_3 - x_0) \cdot (z_2 - z_0)}{(y_2 - y_0) \cdot (x_3 - x_0) - (y_3 - y_0) \cdot (x_2 - x_0)} = \frac{Dx_2 \cdot Dz_3 - Dx_3 \cdot Dz_2}{Dy_2 \cdot Dx_3 - Dy_3 \cdot Dx_2},$$

und diese Werte in (27) eingesetzt, ergeben, nachdem man gleichnamig gemacht hat, die Gleichung 21^a, bezw. 24.

32. Sehr häufig liegt bei Raumfachwerken an einzelnen Knotenpunkten mit mehr als drei Stäben eine derartige Stabanordnung vor, daß alle mit Ausnahme eines einzigen Stabes S_1 in derselben Ebene E liegen. Dann kann die Spannung des freien Stabes S_1 (Abb. 53) sofort ermittelt werden. Man braucht ja nur die Summe aller Kraftkomponenten in Richtung senkrecht zu E aufzustellen, oder das Moment für eine Achse in E zu bilden, oder P zu zerlegen in Richtung S_1 und die Schnittlinie von Ebene (S_1, P) und E. Die Spannung der anderen Stäbe kann natürlich nicht an diesem Punkt gefunden werden, nur ihre Resultante, die mit P und S_1 Gleichgewicht halten muß. Ist etwa $P = 0$, dann erhält S_1 die Spannung Null, auch die Resultante der anderen Stabspannungen verschwindet, diese selbst brauchen aber nicht Null zu sein.

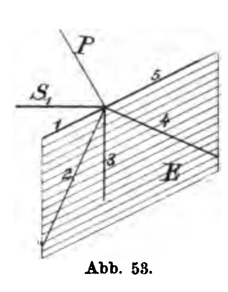


Abb. 53.

§ 11. Die Richtungslinien gehen nicht durch einen Punkt.

33. Soll eine Reihe von Kräften mit verschiedenen Angriffspunkten im Gleichgewicht stehen, so sind sechs Bedingungsgleichungen zu erfüllen, etwa: Summe der Komponenten der Kräfte für drei zu einander senkrecht stehende Richtungen muß verschwinden, und ebenso die Summe der Momente aller Kräfte für drei zu einander senkrecht stehende Achsen, oder auch, die Summe der Momente für sechs allgemeine Achsen muß Null sein. Da sechs Gleichungen vorliegen, so dürfen und müssen für *allgemeine* Lösung sechs Unbekannte vorhanden sein, und es wird demgemäß *im allgemeinen eine beliebige Kraft in sechs Richtungen eindeutig zerlegt werden können.* Es geht aber hieraus auch weiter hervor, daß die Lösung nicht immer eindeutig und endlich ist, es wird Ausnahmefälle geben, auf die noch weiter eingegangen werden muß. Soll eine Kraft mit solchen in *sieben* Richtungen Gleichgewicht halten, bezw. in die sieben Linien zerlegt werden, so ist die Aufgabe viel-

deutig. Ausnahmsweise kann unter gewissen Bedingungen eine Kraft mit fünf, vier und drei Kräften in windschiefer Lage im Gleichgewicht sein, jedoch haben diese Fälle für praktische Zwecke keine Bedeutung, da hierbei das Gleichgewicht für beliebige Belastung gesichert sein muß.[1])

Es soll nun die Aufgabe gelöst werden, sechs Kräfte in vorgegebenen Richtungslinien zu bestimmen, die mit einer gegebenen Kraft P Gleichgewicht halten.[2]) Die Aufgabe läßt sich durchführen mit Hilfe der sechs allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, doch hat dieselbe mit Rücksicht auf ihre Umständlichkeit keinen praktischen Wert.

Sehr zweckmäßig ist wiederum die Momentenmethode, die der Ritterschen Methode für die ebenen Kräftesysteme entspricht.[3]) Bei letzterer wird eine Gleichung mit einer Unbekannten aufgestellt, indem der Momentenpunkt so gewählt wird, daß alle Unbekannten mit Ausnahme einer einzigen kein Moment liefern. Im Raume entspricht dem Momentenpunkt der Ebene die Momentenachse, also müßte bei den sechs gegebenen Richtungslinien die Momentenachse so gewählt werden, daß fünf von ihnen getroffen werden, während die sechste die Achse nicht schneidet, und für diese Momentenachse wäre die Summe aller Momente aufzustellen, um eine Gleichung mit nur einer Unbekannten zu erhalten.

Im allgemeinen gibt es nun allerdings keine Linie, die fünf der gegebenen Richtungslinien trifft; aber für viele Fälle ist dies tatsächlich möglich, und hierauf möge zunächst eingegangen werden.

Liegen z. B. drei Stäbe in einer Ebene (Abb. 54), so kann man als Momentenachse die Schnittlinie dieser Ebene und derjenigen, die durch zwei andere Stäbe, etwa 4 und 5, gegeben ist, einführen (nn). Die in den Linien 1, 2, 3, sowie 4 und 5

---

[1]) Vgl. Schell, Theorie d. Bew. u. d. Kräfte, Leipzig 1880, 2. Aufl., S. 32 ff. Henneberg, Statik d. st. S., § 34.

[2]) Culmann, D. graph. Statik. — Mohr, Civiling. 1876. — Henneberg, Civiling. 1884. — Vgl. auch Enzykl. d. m. W. IV, 5, S. 384.

[3]) Föppl, D. graph. Statik, 2. Aufl., S. 172.

wirkenden Kräfte schneiden diese Achse, und die Momentengleichung enthält demgemäß außer dem Moment der Kraft P nur noch dasjenige der in 6 wirkenden Kraft.

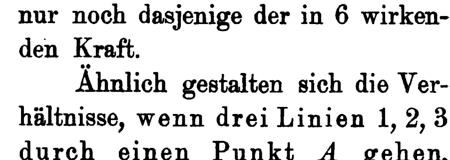


Abb. 54.

Ähnlich gestalten sich die Verhältnisse, wenn drei Linien 1, 2, 3 durch einen Punkt A gehen. Dann ist eine Linie, die durch den Punkt A läuft und zwei andere Linien, z. B. 4 und 5, trifft, eine günstige Momentenlinie. In der Momentengleichung für diese Achse tritt außer P wieder nur die Kraft in 6 auf.

Abb. 55 stellt den Fall dar, daß die zwei Ebenen, in denen fünf Stäbe verteilt sind, eine Schnittlinie im Unendlichen haben. Die Momentengleichung verliert hier ihren Sinn. Die gewünschte Kraft in 6 kann aber sofort gefunden werden, indem man die Summe aller Kraftkomponenten in einer Richtung aufstellt, die senkrecht zur Ebene (1, 2, 3) und (4, 5) gelegen ist.

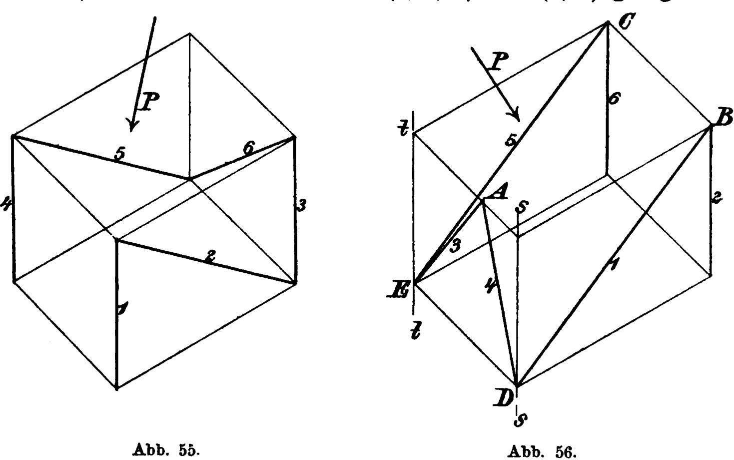


Abb. 55. Abb. 56.

Eine günstige Momentenachse kann auch dann gefunden werden, wenn der Schnittlinie ss von zwei Ebenen mit je zwei Stäben 1, 2 und 3, 4 (Abb. 56) zufällig ein

weiterer Stab, z. B. 6, parallel läuft oder ihn schneidet; dann ist eben die Linie *ss* als Momentenachse zu benutzen, um die Spannung in 5 zu finden. Die Achse in *tt* liefert die Kraft in 1, dann die Linie *AB* eine Gleichung für K_6, weiter *AC* eine solche für K_2, schließlich etwa *CD* eine solche für K_3 und *EB* eine Gleichung für K_4.

34. Wenn nun der ganz allgemeine Fall vorliegt, bei dem nicht eine Linie existiert, die fünf der sechs gegebenen Richtungen schneidet, so muß man davon Gebrauch machen, daß sich immer zwei bestimmte Geraden finden lassen, welche dieselben vier, beliebig ausgewählte Linien unter den sechs schneiden. Das erkennt man leicht mit Hilfe des einschaligen Hyperboloids:[1]) Drei windschiefe Geraden 1, 2, 3 legen ein Hyperboloid fest; die vierte Linie schneidet die Fläche in zwei Punkten *M*, *N*. Durch jeden derselben kann man eine Gerade der zweiten Regelschar ziehen, die alle Linien der ersten Linienschar, also auch 1, 2, 3, trifft und im Punkte *M* bezw. *N* auch die vierte Linie schneidet. Es trifft demnach jede in *M* oder *N* gezogene Gerade der zweiten Regelschar die vier, von vornherein willkürlich gegebenen Linien 1, 2, 3, 4.

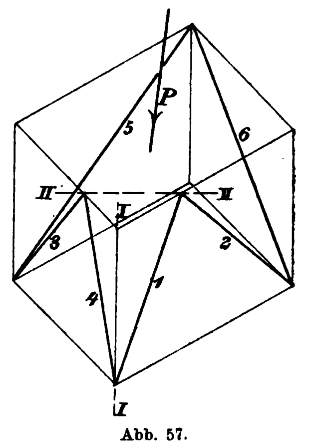


Abb. 57.

Da es demnach immer zwei Linien gibt, die vier unter den sechs Linien schneiden, so können für dieselben zwei Momentengleichungen aufgestellt werden, in denen vier Kräfte nicht vorkommen, sondern nur die zwei anderen. Man gewinnt damit zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

In den praktisch vorkommenden Fällen gestaltet sich die Auffindung des Achsenpaares gewöhnlich sehr einfach. Sollen z. B. bei der Anordnung in Abb. 57

[1]) Föppl, D. graph. Statik, 2. Aufl., S. 172.

die Gleichungen für die Kräfte K_5, K_6 in den Linien 5 und 6 aufgestellt werden, so ist als Momentenachse einmal die Linie I, I zu benützen, d. i. die Schnittlinie der Ebene (3, 4) und (1, 2), und das andere Mal die Linie II, II, d. i. die Verbindungslinie des Schnittpunktes 3, 4 und 1, 2. Die Ermittlung der weiteren Kräfte $K_1 \cdots K_4$ bietet dann keine Schwierigkeiten mehr.

Wenn Linie 5 oder 6 zufällig parallel der Linie I, I läuft, vereinfacht sich dieser Fall auf den von Abb. 56.

35. Unter gewissen Umständen werden die am Anfang dieses Paragraphen erwähnten sechs Gleichungen für sechs Unbekannte vieldeutige oder unendlich große Werte liefern. Verfolgt man diesen Ausnahmefall weiter, so findet sich, daß die sechs Richtungslinien nicht sechs sich selbst entsprechende Linien eines Nullsystems sein dürfen.[1]) Mit dieser Forderung ist für praktische Bedürfnisse nicht viel anzufangen, es handelt sich hier vielmehr darum, diejenigen speziellen Lagen anzugeben, die am leichtesten vorkommen können und gut zu übersehen sind. Die Frage nach dem Hauptausnahmefall ist mittels der vorhergehenden Ausführungen sofort zu erledigen. Sind nämlich die Richtungslinien so verteilt, daß sie alle von einer Geraden getroffen werden,[2]) so entsteht für diese Gerade kk eine Momentengleichung:

$$P \cdot r = 0,$$

wenn P die äußere Kraft und r den Hebelarm bezgl. der Momentenachse kk darstellt. Solange P nicht die Achse schneidet, ist $P \cdot r$ sicher von Null verschieden, es hat also

[1]) Wenn eine gegebene Kraft mit fünf anderen im Raume verteilten Gleichgewicht halten soll, ist dies nur möglich, falls die sechs Kraftlinien sechs Nulllinien desselben Nullsystems sind. Wirkt nun eine siebente Kraft, die mit sechs Kräften in Linien dieser speziellen Lage im Gleichgewicht stehen soll, so entsteht vieldeutige Lösung, da ja die sechs Kräfte für sich verschiedene Gleichgewichtssysteme bilden können. Die Verhältnisse liegen ähnlich, wie in dem Fall, daß eine Kraft mit drei unbekannten sich schneidenden Kräften in der Ebene Gleichgewicht halten soll. Vgl. Henneberg, Statik d. st. S., §§ 34, 35. — Schell, Theorie d. Bew. u. d. Kr., 2. Aufl., S. 41.

[2]) Föppl, D. graph. Statik, 2. Aufl., S. 169.

die Gleichung keinen Sinn. Der Fall, daß zufällig die Kraft P auch die Momentenachse trifft, braucht nicht weiter beachtet zu werden, da das Gleichgewicht in den praktischen Fällen nicht nur für eine spezielle Lage von P, sondern für alle Lagen gesichert sein muß. Eine Kraft kann also mit solchen in sechs Richtungslinien nur dann Gleichgewicht halten, wenn die sechs Richtungslinien nicht von einer und derselben Geraden geschnitten werden.[1])

Es sollen derartige zu vermeidende Anordnungen aufgesucht werden. Zunächst dürfen nicht mehr als drei Linien in einer Ebene liegen; würden z. B. vier von sechs Richtungslinien oder Stäben sich in einer Ebene befinden (Abb. 58), so würde die Schnittlinie der Ebene (1, 2, 3, 4) und (5, 6) eine Momentenlinie ss liefern, die von den sechs Linien getroffen wird.

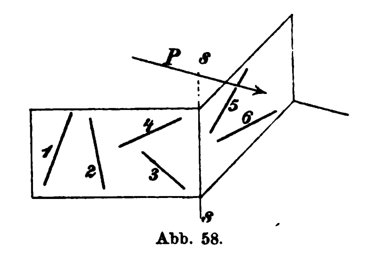


Abb. 58.

Auch dürfen nicht mehr als drei Linien durch einen Punkt gehen, da ja anderenfalls (Abb. 59) die durch diesen Punkt A gehende Linie, die die beiden anderen Stäbe schneidet, eine Achse liefert, die alle sechs Stäbe trifft.

[1]) Um zu zeigen, daß diese Bedingung in der obenerwähnten enthalten ist, fasse man zunächst die fünf ersten Linien ins Auge, die die Linie ss schneidet. Durch diese Linien $1 \cdots 5$ ist ein Nullsystem festgelegt, dessen Nullebene durch einen beliebigen Punkt M geht und die Linie ss enthält; (daß letzteres der Fall, erkennt man aus folgendem: die fünf Linien bestimmen fünf Paare von geraden Linien, von denen jedes vier der fünf Linien schneidet, und die eine dieser Linienpaare ist jedesmal ss; die fünf Linien, die durch M gehen, und je ein Paar treffen, bestimmen eine Ebene, nämlich die Nullebene, und da die Linie ss den Paaren gemeinsam ist, liegt eben ss in der Nullebene). Faßt man nun die Linien $2 \cdots 5$ als Nulllinien auf, so ist durch diese wiederum eine Nullebene bestimmt, und zwar wieder die Ebene (M, s), da ja diese fünf Linien ebenfalls die Gerade ss schneiden. Demnach ist die Linie 6 eine Nulllinie desselben Nullsystems, wie die Linien $1 \cdots 5$, womit bewiesen ist, daß sechs Linien, die von derselben Geraden getroffen werden, immer als Nulllinien eines Nullsystems aufgefaßt werden können.

Ferner dürfen nicht je drei Linien sich in einem Punkt schneiden, weil hierbei ebenfalls die zu vermeidende Momentenlinie erhalten wird. Ein spezieller Fall hiervon ist die Anordnung nach Abb. 60, wobei der eine Schnittpunkt unendlich fern liegt, so daß jetzt die senkrechte Linie 2 die maßgebende Achse ergibt.

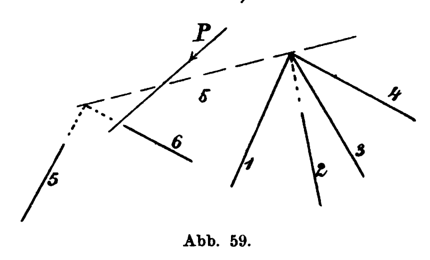


Abb. 59.

Es ist überhaupt nicht möglich, die von den vier Punkten A, B, C, D auslaufenden sechs Richtungslinien, von denen je eine senkrecht verläuft, in den vier angedeuteten lotrechten Ebenen

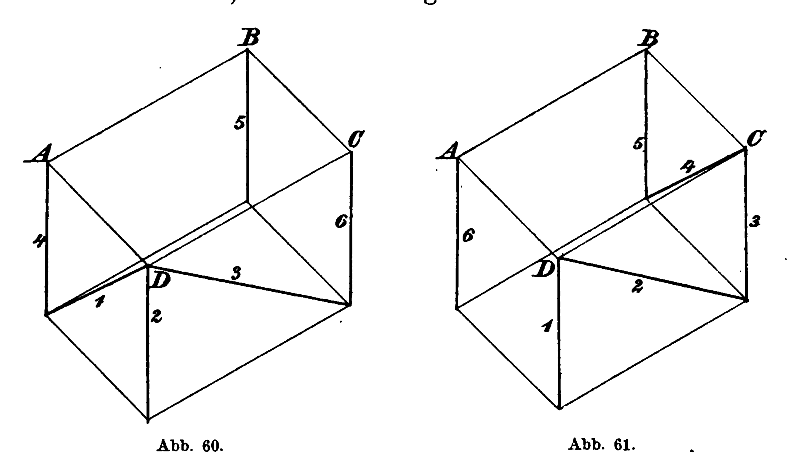


Abb. 60. Abb. 61.

so zu verteilen, daß die sechs Kräfte eindeutig bestimmt sind. So ist z. B. auch die Anordnung nach Abb. 61 als Ausnahmefall zu bezeichnen, da die Linie 6 der Schnittlinie 3 parallel läuft, also diese auch schneidet.

Wenn die sechs Kraftlinien nicht von derselben Geraden geschnitten werden, ist es immerhin noch möglich, daß die Spannungszerlegung in die sechs Richtungen nicht eindeutig wird; das Auftreten dieses seltenen Falles stellt sich alsdann bei der Berechnung der Kräfte heraus.

36. Hiermit sind die beiden Gleichgewichtsfälle, die allgemein bestimmt sind, erledigt. Treffen in einem Punkt mehr als drei Richtungslinien zusammen, oder sind mehr als sechs Linien im Raume verteilt, so reichen die Gleichungen zur eindeutigen Lösung nicht aus, die Aufgabe ist also, sofern keine weiteren Bedingungen vorliegen, unbestimmt. Ähnlich nun, wie man in ersterem Fall die Spannung eines Stabes finden kann, wenn die anderen alle in derselben Ebene liegen, kann man auch für die letzte Stabverteilung in besonderem Fall die Spannung eines einzelnen Stabes finden. Ist nämlich eine Reihe von Richtungslinien oder Stäben so angeordnet, daß sie alle mit Ausnahme eines einzigen von derselben Linie getroffen werden, sind also z. B. alle Stäbe bis auf einen in zwei Ebenen verteilt (Abb. 62), so liefert die Aufstellung des Momentes für ihre Schnittlinie eine Gleichung mit einer Unbekannten, woraus die Spannung des ausgezeichneten Stabes berechnet werden kann. Die am Schluß von § 10 erwähnte Verteilung ist ein spezieller Fall der hier angegebenen allgemeineren.

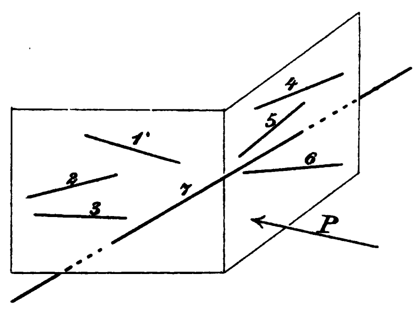


Abb. 62.

Drittes Kapitel.

Bildungsweise und Berechnung der Raumfachwerke.

§ 12. Bildungsweise der freien Raumfachwerke.

37. Bei dem ebenen Fachwerk waren die einfachsten Bildungsgesetze für statisch bestimmte Systeme diejenigen, daß man, ausgehend von einem Stab, je einen weiteren Knotenpunkt durch zwei Stäbe anschloß, oder daß man zwei sicher statisch

bestimmte Systeme durch drei sich nicht schneidende Stäbe zu einem einzigen Fachwerk verband. Entsprechende Bildungsgesetze werden auch für Raumfachwerke gelten. Der Eindeutigkeit der Kräftezerlegung entsprechend, erhält man demgemäß ein statisch bestimmtes Raumsystem, indem man

1. von einem Dreieck ausgehend, je einen Knotenpunkt durch drei nicht in einer Ebene gelegene Stäbe anschließt;
2. zwei sicher statisch bestimmte Raumsysteme durch sechs Stäbe in allgemeiner Lage zu einem neuen Gebilde vereinigt (Abb. 63).

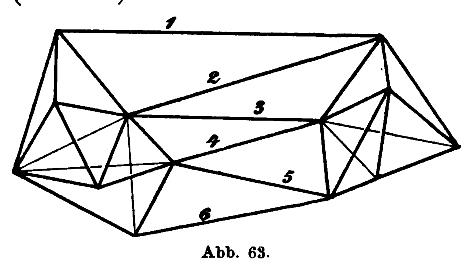


Abb. 63.

Letztere sechs Stäbe dürfen nicht sechs Nulllinien desselben Nullsystems sein, insbesondere dürfen nicht alle sechs Verbindungsstäbe von einer und derselben Linie getroffen werden können. So ist z. B. das System nach Abb. 64 nicht statisch bestimmt, obwohl dieses bei den Ausgangsteilen I und II sicher der Fall ist; denn die Linie $\overline{II, V}$ schneidet alle sechs Stäbe.

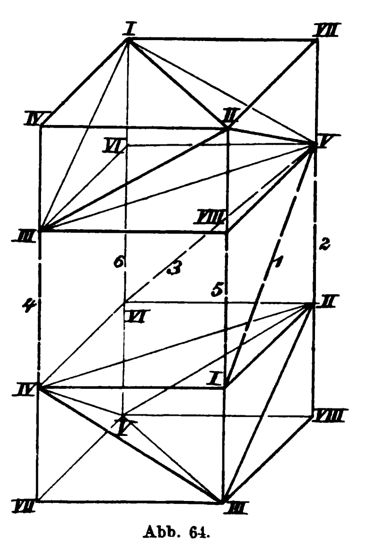


Abb. 64.

Bei dem zweiten Bildungsgesetz können drei Stäbe durch einen, beiden Teilsystemen angehörenden Gelenkpunkt ersetzt werden. Beide Teile haben also dann einen Punkt gemeinschaftlich und sind außerdem durch drei Stäbe verbunden.

Die Stabzahl der nach diesen beiden Gesetzen hergestellten Fachwerke beträgt:

$$s = 3n - 6.$$

Der Beweis ist geradeso zu führen, wie derjenige bei den ebenen Systemen. Für den Teil, der an das Dreieck angeschlossen ist, ist die Stabzahl s_1 gegeben durch:

$$s_1 = 3n_1,$$

dagegen für das Dreieck ist:

$$s_2 = 3 = 3n_2 - 6,$$

demnach ist die Gesamtzahl:

$$s_1 + s_2 = 3(n_1 + n_2) - 6,$$
$$s = 3n - 6,$$

wenn n die Anzahl der Knotenpunkte angibt.

Beim zweiten Bildungsgesetz hat jeder Teil $3n - 6$ Stäbe, also $s_1 = 3n_1 - 6$ und $s_2 = 3n_2 - 6$; dazu kommen noch sechs Verbindungsstäbe, so daß im ganzen:

$$s = s_1 + s_2 = 3(n_1 + n_2) - 6.$$

Daß derartig gebildete statisch bestimmte Systeme auch kinematisch bestimmt sind, läßt sich leicht erkennen. Geht man von irgend einem starren Gebilde (etwa einem Dreieck) aus und schließt einen Punkt durch zwei Stäbe AO, BO an, so kann sich derselbe auf einem Kreisbogen um AB als Achse (Abb. 65) bewegen. Die Bewegungsfähigkeit wird aber aufgehoben durch einen weiteren Stab CO, der nicht mit AB in derselben Ebene liegt; denn dann müßte sich O auf dem Kreis um AB und gleichzeitig auf einer Kugel um C bewegen, und das ist nicht möglich, da C der eindeutige Schnittpunkt von Kreis und Kugel an dieser Stelle ist. Eine Beweglichkeit ist nur möglich, wenn der Kreis um AB in die Kugeloberfläche fällt, oder an sie tangiert. Ersteres ist der Fall, wenn C auf AB liegt, dann ist endliche Bewegung möglich, letzteres tritt ein, wenn C nicht auf AB, aber in der

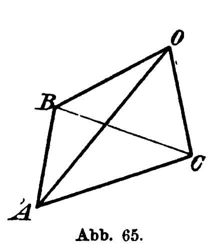


Abb. 65.

Ebene ABO liegt, dann ist die Möglichkeit einer unendlich kleinen Beweglichkeit vorhanden.

Ähnlich liegen die Verhältnisse für Fachwerke nach dem zweiten Bildungsgesetz. Wären nur (Abb. 66) die drei Stäbe nach A vorhanden, so könnte sich Teil II um I drehen, so daß alle Punkte von II Kugelflächen um A beschreiben. Wird nun noch ein weiterer Punkt, etwa B, durch die Stäbe 4, 5 angefügt, so liegt Punkt B wohl fest, aber die Punkte von II können sich noch auf Kreisen bewegen, um die Linie AB als Achse. Die Bewegung wird erst aufgehoben durch einen weiteren Stab, z. B. 6.

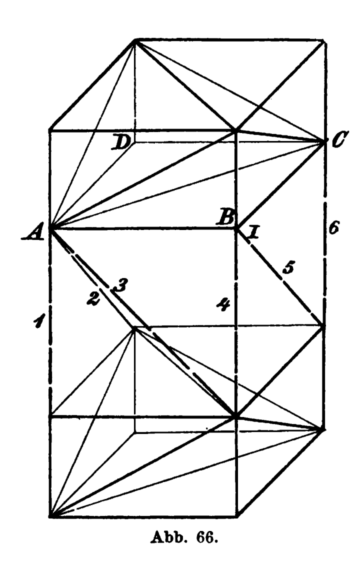


Abb. 66.

Sind dagegen die sechs Stäbe etwa so verteilt, daß je drei durch einen Punkt gehen, so kann sich der Körper II um die Verbindungslinie dieser Punkte derartig bewegen, daß alle Punkte von II Kreise beschreiben. Bei weiterer Überlegung erkennt man so, daß die Anordnungen, die statisch unsichere Fachwerke liefern, auch labile Systeme ergeben.

38. Es läßt sich nun wiederum wie bei den ebenen Systemen zeigen, daß jedes statisch bestimmte System soviel Stäbe als notwendige und hinreichende Zahl haben muß, wie das kinematisch bestimmte System, und daß jedes statisch bestimmte Fachwerk stabil und zwar kinematisch bestimmt ist. Zunächst ist sofort zu erkennen, daß überhaupt jedes statisch bestimmte System als notwendige Stabzahl haben muß:

$$s = 3n - 6. \tag{30}$$

Denn jeder der n Knotenpunkte liefert drei Gleichgewichtsbedingungen; da aber die äußeren Kräfte

$$X_1, Y_1, Z_1 \cdots X_i, Y_i, Z_i \cdots X_n, Y_n, Z_n$$

im Gleichgewicht stehen müssen, sind sie sechs Bedingungen unterworfen, so daß demgemäß nur $(3n - 6)$ voneinander unabhängige Gleichungen aufstellbar sind. Da nun die Zahl der Unbekannten, also die Stabspannungen, gleich der Zahl der Gleichungen sein muß, um eine allgemein-mögliche Lösung zu ergeben, so darf das statisch bestimmte Raumfachwerk nur $3n - 6$ Stäbe, muß aber auch soviele, besitzen. Hat es deren mehr, so liegt ein unbestimmtes System vor, das für die rein statische Behandlung eine vieldeutige Lösung zuläßt, sind es weniger Stäbe, so ergibt sich eine bestimmte Lösung nur für eine ganz spezielle Belastung. Da andererseits ein System von s Gleichungen mit s Unbekannten auch Ausnahmefälle zuläßt, so wird es auch Raumfachwerke mit $3n - 6$ Stäben geben, die trotz der richtigen Anzahl der Stäbe eine vieldeutige oder unendlich große Spannung in denselben erhalten.

Es mögen die willkürlich angenommenen Kräfte gegeben sein durch:

$$\begin{array}{l} X_1 \cdots X_i \cdots X_{n-3} \\ Y_1 \cdots Y_i \cdots Y_{n-3}, Y_{n-2} \\ Z_1 \cdots Z_i \cdots Z_{n-3}, Z_{n-2}, Z_{n-1} \end{array}$$

und durch sie sind dann mittels der sechs Gleichgewichtsbedingungen festgelegt die Kräfte

$$X_n, Y_n, Z_n, X_{n-1}, Y_{n-1}, X_{n-2}.$$

Stellt man nun für jeden Knotenpunkt die Gleichgewichtsbedingungen auf, nennt wiederum die Stablänge des r. Stabes: l_r, so daß also:

$$l_r^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2$$

und beachtet weiter die Bemerkungen, die bei Aufstellung der entsprechenden Gleichungen für die ebenen Fachwerke gemacht wurden, so erkennt man leicht die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&S_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x_1} + S_2 \cdot \frac{\partial l_2}{\partial x_1} + \cdots + S_r \cdot \frac{\partial l_r}{\partial x_1} + \cdots + S_s \cdot \frac{\partial l_s}{\partial x_1} = X_1 \\
&S_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x_2} + S_2 \cdot \frac{\partial l_2}{\partial x_2} + \cdots + S_r \cdot \frac{\partial l_r}{\partial x_2} + \cdots + S_s \cdot \frac{\partial l_s}{\partial x_2} = X_2 \\
&\vdots \\
&S_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x_{n-3}} + S_2 \cdot \frac{\partial l_2}{\partial x_{n-3}} + \cdots + S_r \cdot \frac{\partial l_r}{\partial x_{n-3}} + \cdots + S_s \cdot \frac{\partial l_s}{\partial x_{n-3}} = X_{n-3}, \\
&S_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial y_1} + S_2 \cdot \frac{\partial l_2}{\partial y_1} + \cdots + S_r \cdot \frac{\partial l_r}{\partial y_1} + \cdots + S_s \cdot \frac{\partial l_s}{\partial y_1} = Y_1 \\
&\vdots \\
&S_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial y_{n-2}} + S_2 \cdot \frac{\partial l_2}{\partial y_{n-2}} + \cdots + S_r \cdot \frac{\partial l_r}{\partial y_{n-2}} + \cdots + S_s \cdot \frac{\partial l_s}{\partial y_{n-2}} = Y_{n-2}, \\
&S_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial z_1} + S_2 \cdot \frac{\partial l_2}{\partial z_1} + \cdots + S_r \cdot \frac{\partial l_r}{\partial z_1} + \cdots + S_s \cdot \frac{\partial l_s}{\partial z_1} = Z_1 \\
&\vdots \\
&S_1 \cdot \frac{\partial l_1}{\partial z_{n-1}} + S_2 \cdot \frac{\partial l_2}{\partial z_{n-1}} + \cdots + S_r \cdot \frac{\partial l_r}{\partial z_{n-1}} + \cdots + S_s \cdot \frac{\partial l_s}{\partial z_{n-1}} = Z_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Bestimmte endliche Werte für die Unbekannten $S_1 \cdots S_s$ treten nur auf, wenn die Determinante des Systems[1]) einen von Null verschiedenen Wert besitzt; also wenn

$$
D \equiv \begin{vmatrix}
\frac{\partial l_1}{\partial x_1} & \frac{\partial l_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial l_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial l_s}{\partial x_1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \\
\frac{\partial l_1}{\partial x_{n-3}} & \frac{\partial l_2}{\partial x_{n-3}} & \cdots & \frac{\partial l_r}{\partial x_{n-3}} & \cdots & \frac{\partial l_s}{\partial x_{n-3}} \\
\frac{\partial l_1}{\partial y_1} & \frac{\partial l_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial l_r}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial l_s}{\partial y_1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \\
\frac{\partial l_1}{\partial y_{n-2}} & \frac{\partial l_2}{\partial y_{n-2}} & \cdots & \frac{\partial l_r}{\partial y_{n-2}} & \cdots & \frac{\partial l_s}{\partial y_{n-2}} \\
\frac{\partial l_1}{\partial z_1} & \frac{\partial l_2}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial l_r}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial l_s}{\partial z_1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \\
\frac{\partial l_1}{\partial z_{n-1}} & \frac{\partial l_2}{\partial z_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial l_r}{\partial z_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial l_s}{\partial z_{n-1}}
\end{vmatrix} \gtrless 0. \qquad (31)
$$

[1]) Föppl, D. Fachw. i. R., Leipzig 1892, S. 30.

Es ist ferner das Raumsystem bezgl. seines kinematischen Verhaltens zu betrachten. Um die Verschiebungen der n Punkte festzustellen, müssen sechs von ihnen gegeben sein, da ja das System in irgend einer Weise als festgelegt zu denken ist. Es werde angenommen, daß die Ebene, die durch die Punkte n, $(n-1)$ und $(n-2)$ gelegt ist, als yz-Ebene ihre Lage beibehalten soll, daß also keiner der drei Punkte sich aus der Ebene verschieben kann; d. h. es ist

$$\delta x_n = \delta x_{n-1} = \delta x_{n-2} = 0.$$

Der Punkt n wird nun völlig festgehalten und als Ursprung eines Koordinatensystems benützt, also ist außer δx_n auch noch $\delta y_n = \delta z_n = 0$. Weiter soll die Lage von Stab $(n, n-1)$ unverändert bleiben und in diesen die z-Achse gelegt werden, so daß also nur für δz_{n-1} ein von Null verschiedener Wert auftreten kann, während $\delta x_{n-1} = \delta y_{n-1} = 0$ sein muß. Es sind demnach unter den $3n$ Verschiebungen von vornherein sechs bekannt, indem:

$$\delta x_n = \delta x_{n-1} = \delta x_{n-2} = \delta y_n = \delta y_{n-1} = \delta z_n = 0$$

ist. Zur Bestimmung der verbleibenden $(3n-6)$ Unbekannten sind $(3n-6)$ Gleichungen nötig. Diese werden aber nur durch die Stäbe geliefert, indem

$$l_r^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2,$$

$$l_r \cdot \delta l_r = (x_i - x_k) \cdot \delta x_i + (x_k - x_i) \cdot \delta x_k + (y_i - y_k) \cdot \delta y_i + (y_k - y_i) \cdot \delta y_k$$
$$+ (z_i - z_k) \cdot \delta z_i + (z_k - z_i) \cdot \delta z_k,$$

also müssen $(3n-6)$ Stäbe vorhanden sein, wenn die Verrückungen der Knotenpunkte bei bekannter Längenänderung der Stäbe als eindeutig und endlich bestimmbar sein sollen. Wenn alle Stäbe starr sind, dann muß sich aus den Gleichungen ergeben, daß alle Verschiebungen δx_i, δy_i, δz_i den Wert Null besitzen, falls ein unverschieblich-starres System vorliegen soll.

Man nehme nun zunächst an, die Stäbe erlitten gewisse Verlängerungen δl_r; dann sind die Verschiebungen der Knotenpunkte δx_i, δy_i, δz_i zu bestimmen aus folgenden Gleichungen, die in entsprechender Weise wie diejenigen für die ebenen Systeme gewonnen werden:

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial l_1}{\partial x_1}\cdot\delta x_1+\cdots\frac{\partial l_1}{\partial x_{n-3}}\cdot\delta x_{n-3}+\frac{\partial l_1}{\partial y_1}\cdot\delta y_1+\cdots\frac{\partial l_1}{\partial y_{n-2}}\cdot\delta y_{n-2}\\
\qquad\qquad+\frac{\partial l_1}{\partial z_1}\cdot\delta z_1+\cdots\frac{\partial l_1}{\partial z_{n-1}}\cdot\delta z_{n-1}=\delta l_1\\
\vdots\\
\frac{\partial l_r}{\partial x_1}\cdot\delta x_1+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{\partial l_r}{\partial z_{n-1}}\cdot\delta z_{n-1}=\delta l_r\\
\vdots\\
\frac{\partial l_s}{\partial x_1}\cdot\delta x_1+\cdots\frac{\partial l_s}{\partial x_{n-3}}\cdot\delta x_{n-3}+\frac{\partial l_s}{\partial y_1}\cdot\delta y_1+\cdots\frac{\partial l_s}{\partial y_{n-2}}\cdot\delta y_{n-2}\\
\qquad\qquad+\frac{\partial l_s}{\partial z_1}\cdot\delta z_1+\cdots\frac{\partial l_s}{\partial z_{n-1}}\cdot\delta z_{n-1}=\delta l_s.
\end{array}$$

Tatsächlich sind aber infolge der Starrheit der Stäbe die Werte $\delta l_1\cdots\delta l_s$ alle Null, so daß man bezgl. der Verschiebungen δx_i, δy_i, δz_i jetzt $(3n-6)$ homogene Gleichungen erhält. Diese Unbekannten δx_i, δy_i, δz_i müssen nun bei starren Stäben den Wert Null besitzen; das ist aber nach der Lehre der Determinanten nur möglich, wenn die Determinante der Gleichungen nicht verschwindet. Also ergibt sich die Bedingung:

$$D'\equiv\begin{vmatrix}
\frac{\partial l_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial l_1}{\partial x_{n-3}} & \frac{\partial l_1}{\partial y_1}\cdots\frac{\partial l_1}{\partial y_{n-2}} & \frac{\partial l_1}{\partial z_1}\cdots\frac{\partial l_1}{\partial z_{n-1}}\\
\frac{\partial l_2}{\partial x_1}\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
\frac{\partial l_r}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial l_r}{\partial x_{n-3}} & \frac{\partial l_r}{\partial y_1}\cdots\frac{\partial l_r}{\partial y_{n-2}} & \frac{\partial l_r}{\partial z_1}\cdots\frac{\partial l_r}{\partial z_{n-1}}\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
\frac{\partial l_s}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial l_s}{\partial x_{n-3}} & \frac{\partial l_s}{\partial y_1}\cdots\frac{\partial l_s}{\partial y_{n-2}} & \frac{\partial l_s}{\partial z_1}\cdots\frac{\partial l_s}{\partial z_{n-1}}
\end{vmatrix}\gtrless 0. \quad (32)$$

Diese Determinante D' stimmt dem Werte nach mit derjenigen in (31) überein, die für die statische Bestimmtheit maßgebend ist, so daß man daraus den Schluß ziehen kann:

Jedes statisch sichere räumliche Fachwerk mit $(3n-6)$ Stäben (statisch bestimmtes System) ist auch kinematisch bestimmt, also starr, und umgekehrt.

Aus dem Gleichungssystem der S_i kann nun genau so, wie bei den ebenen Systemen, abgelesen werden, daß S_i beim Verschwinden der Determinante D einen vieldeutigen oder unendlich großen Wert annimmt, und weiter erkannt werden, daß man die Untersuchung nur für ein **einziges** Lastensystem durchzuführen hat. Es gilt demgemäß auch hier der Satz:

Ein System mit $(3n-6)$ Stäben ist sicher stabil, wenn bei irgend einer Belastung sich in allen Stäben endliche und eindeutige Spannungen finden, bezw. wenn beim Fehlen von äußeren Kräften in allen Stäben die Spannung Null eindeutig auftritt.

§ 13. Drittes Bildungsgesetz. Berechnung der Raumfachwerke bei einfacher Stabvertauschung.

39. Das erste und zweite Bildungsgesetz wurde bereits im vorigen Paragraphen erwähnt. Ein System, das nach einer dieser beiden Methoden aufgebaut ist, kann sofort berechnet werden mittels der in §§ 8—11 angegebenen Ausführungen, da bei den Systemen nach dem ersten Bildungsgesetz einfach jedesmal eine Kraft in drei Raumkomponenten zu zerlegen ist, während bei den Systemen nach dem zweiten Bildungsgesetz (Abb. 63) zunächst die sechs Spannungen in den verbindenden Stäben zu ermitteln sind und dann jeder der beiden Teile für sich zu betrachten ist. Die Schnitte, die bei den Raumfachwerken zu legen sind, sind natürlich Teile einer Fläche, also Flächenschnitte, während bei den ebenen Systemen Linienschnitte auftreten.

40. Aus den so entstehenden Systemen können nun abermals die verschiedenartigsten Raumfachwerke mittels Stabvertauschung (einem dritten Aufbaugesetz) abgeleitet werden, wie wiederum Henneberg als Erster mittels seines allgemeinen Bildungsgesetzes bei spezieller Stabvertauschung zeigte, während Müller-Breslau den Hennebergschen Gedankengang auf die reine Stabvertauschung übertrug. Henneberg sagt:[1]) Ein sicher

[1]) Henneberg, Statik d. st. S., § 43.

stabiles System wird in ein bewegliches Gebilde verwandelt, wenn ein Stab SQ entfernt wird; wird aber ein neuer Knotenpunkt durch vier Stäbe angeschlossen, die von den Punkten S, Q und zwei weiteren R, P ausgehen (Abb. 67), so entsteht wieder ein stabiles System, sofern die fünf Punkte nicht auf einer bestimmten Fläche zweiter Ordnung liegen. Statt des einen Stabes SQ können auch deren zwei, etwa PQ und NS, entfernt werden, doch muß dann der Knotenpunkt durch fünf von P, Q, N, S und etwa R auslaufende Stäbe angefügt werden, wobei aber nun die sechs Punkte nicht auf einer bestimmten Fläche vierter Ordnung liegen dürfen, wenn das neue System stabil sein soll; anderenfalls ist unendlich kleine Bewegung möglich. Durch diese spezielle Festlegung hat Henneberg ein klares, bestimmtes Bildungsgesetz geschaffen, womit man aus einem System mit n Knotenpunkten ein solches mit $(n+1)$ Punkten herleiten kann.

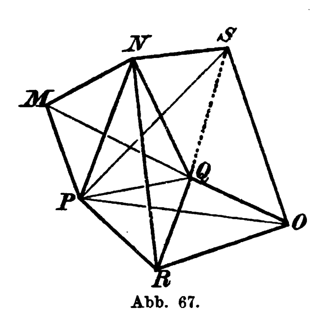


Abb. 67.

Umgekehrt kann man mit diesem Gesetz jedes System mit n Knotenpunkten auf ein solches mit $(n-1)$ Knotenpunkten reduzieren, da jedes Raumfachwerk mit $(3n-6)$ Stäben wenigstens entweder einen dreifachen, vierfachen oder aber einen fünffachen Knotenpunkt besitzen muß. Dieses geht daraus hervor, daß durchschnittlich von einem Knotenpunkt an Stäben ausgehen:

$$\frac{2\cdot(3n-6)}{n} = 6 - \frac{12}{n}, \qquad (33)$$

also eine Zahl kleiner als 6; es muß demnach wenigstens ein Knotenpunkt vorhanden sein, von dem höchstens fünf Stäbe auslaufen.

Statt zu sagen: man entferne einen Knotenpunkt, füge dafür einen Stab zwischen zwei solchen Ausgangspunkten ein, die sich gegeneinander verschieben können, kann man ausdrücken: es wird einer von den Stäben OP, OQ, OR, OS fortgenommen, dafür ein Stab zwischen zweien der Punkte

P, Q, R, S, die sich gegeneinander verschieben, eingezogen. Das Resultat ist genau dasselbe, da ja nach der Stabvertauschung der Knotenpunkt O doch nur noch durch drei Stäbe angeschlossen und sicher festgelegt ist. An Stelle dieser speziellen Stabvertauschung kann auch wieder die allgemeine Stabvertauschung benutzt werden:[1]) Durch Fortnahme eines oder mehrerer Stäbe entsteht ein bewegliches Stabsystem; es müssen dann so viele Stäbe in solcher Lage eingezogen werden, daß die Beweglichkeit aufgehoben wird, daß sich also die einzelnen Punkte nicht mehr gegeneinander verschieben können.

Allgemein kann man diese Reduktion kurz ausdrücken: das zu untersuchende Fachwerk mit $(3n-6)$ Stäben ist durch Stabvertauschungen in ein sicher stabiles System zu verwandeln, dessen Spannungen sich als eindeutige und endliche Werte mittels einer der einfachen Methoden der §§ 8—11 bestimmen lassen.[2]) Mit der speziellen Stabvertauschung nach Hennebergscher Annahme läßt sich dies natürlich immer durchführen; aber gewöhnlich ist gerade bei Raumfachwerken die reine Stabvertauschung, als übersichtlicher und bequemer, zweckmäßiger zu verwenden, zumal man häufig direkt erkennt, welche (eine oder mehrere) Stabvertauschungen am praktischsten vorzunehmen sind, damit das vorliegende System in ein einfaches übergeführt werden kann.

41. Auch bei den Raumfachwerken lassen sich natürlich, geradeso wie bei den ebenen Systemen, für die reine Stabvertauschung Regeln angeben, nach denen man vorzugehen hat, um stabile Fachwerke zu erhalten, deren Spannungen sich durch einfache Kräftezerlegung bestimmen lassen. Diese Regeln beruhen wiederum auf dem ersten Bildungsgesetz.[3]) Man nimmt

---

[1]) Vgl. hierzu die Ausführungen in Nr. 6, 12, 16 dieses Werkes, woselbst näher darauf eingegangen, daß Henneberg als der eigentliche Urheber des Verfahrens der Stabvertauschung anzusehen ist.

[2]) Müller-Breslau, Zentralbl. d. Bauverw. 1891, S. 439 — 1902 — 1903. — D. n. Meth. d. Fest., 3. Aufl., S. 249ff. — Vgl. auch Mehrtens, Statik d. Bauk., 1. Bd., § 11.

[3]) Vgl. hierzu: Müller-Breslau, Zentralbl. d. Bauv. 1903, S. 509.

zu diesem Zweck zunächst einmal die störenden Stäbe fort, damit man ein Gebilde erhält, dessen Spannungen ohne weiteres bestimmbar sind durch Zerlegung einer Kraft in drei gegebene Richtungen. Wäre ein System nach dem ersten Bildungsgesetz aufgebaut, so müßte nach der successiven Fortstreichung von Knotenpunkten mit drei unbekannten Spannungen schließlich ein Dreieck übrig bleiben, oder allgemeiner gesagt: ein stabiles Endsystem mit $(3\nu - 6)$ Stäben bei ν Knotenpunkten. Ist aber das zu untersuchende Fachwerk nicht so einfach gebildet und hat man zuerst die störenden Stäbe, dann nacheinander alle dreifachen Knotenpunkte entfernt, so gelangt man schließlich zu einem Endsystem, das sicher zu wenig Stäbe hat, also labil ist. In dasselbe, das wieder ν Knotenpunkte besitzen möge, sind nun so viel Ersatzstäbe einzuziehen, daß es stabil wird, also die Stabzahl $(3\nu - 6)$ besitzt. Hatte das ursprüngliche System die richtige Stabzahl, dann muß die Anzahl der notwendigen Ersatzstäbe gleich sein derjenigen der eingeführten störenden Stäbe, da ja das verwandelte System, als nach dem ersten Bildungsgesetz aufgebaut, sicher die rechte Stabzahl hat. Man hat demgemäß die Regel: Liegt ein System vor, das keinen dreifachen Knotenpunkt besitzt, so nimmt man bei einem vierfachen Knotenpunkt einen störenden Stab, bei einem fünffachen zwei störende Stäbe fort, denkt sich dann den so gewonnenen dreifachen Knotenpunkt entfernt, dann weiter alle möglichen dreifachen, bis man wieder auf einen vier- oder fünffachen Knotenpunkt kommt. An diesem hat man abermals einen bezw. zwei störende Stäbe fortzunehmen, denkt sich dann den so entstandenen dreifachen Knotenpunkt entfernt, hiernach die weiteren dreifachen Knotenpunkte usw., bis man schließlich nur Knotenpunkte mit weniger als drei Stäben übrig behält, und gelangt damit zu einem beweglichen Endsystem. In dieses sind so viel Stäbe einzuziehen, daß es in ein stabiles Gebilde verwandelt wird. Ist die Anzahl der Ersatzstäbe gleich derjenigen

der störenden Stäbe, so hat das gegebene System die richtige Stabzahl. Die Frage nach der Stabilität bedarf einer weiteren Untersuchung.

Der Nachteil bei dieser Gewinnung der Ersatzstäbe ist der, daß man fast alle Knotenpunkte erst gestrichen denken muß, um auf dieselben zu kommen. Ein Vorteil ist, daß man unbedingt zu einem stabilen System gelangt, wenn man das Endsystem unverschieblich gestaltet, und daß die Regel bei praktischer Reduktion immer zu der geringsten Anzahl von Stabvertauschungen führt, die notwendig sind zur Gewinnung eines Systems nach dem ersten Bildungsgesetz. Im übrigen ist zu bemerken, daß es vielfach keiner besonderen Überlegung bedarf, um wirkliche Ersatzstäbe zu finden, daß zumal bei einiger Übung eine Regel entbehrlich ist.

Eine Reihe von Beispielen soll die Methode der Stabvertauschung erläutern. Das in Abb. 68 dargestellte Raumsystem enthält die richtige Anzahl von Stäben; ein dreifacher Knotenpunkt ist nicht vorhanden, vielmehr nur vierfache. Man nehme einen Stab, z. B. T, fort und ziehe einen Ersatzstab so ein, daß im neuen System je ein Knotenpunkt durch drei Stäbe angeschlossen ist. Ein solcher Stab ist z. B. $\overline{\text{III, IV}}$. Nach der Hennebergschen Regel würde dieser Stab erhalten, indem man etwa Punkt II entfernt. Das neue System ist sicher stabil: beginnend mit Knotenpunkt I kann man die Spannung in den drei Stäben 1, 2, 3 ermitteln, dann bei II diejenige in 4, 5, 6, bei III in 7, 8, 9 (Ersatzstab), weiter an IV: 10 und 11 (also zwei Unbekannte) und an V noch 12.

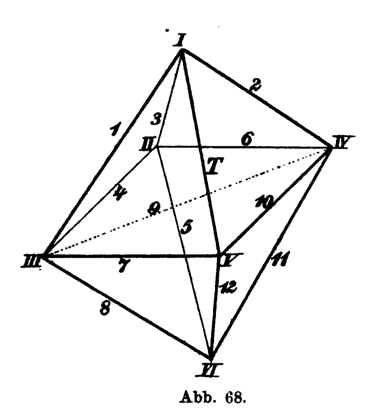


Abb. 68.

Um einen anderen Ersatzstab (Abb. 69) für den Tauschstab T zu finden, denke man sich wieder diesen als störenden

Stab beseitigt, dann nacheinander die Punkte I, II, III mit je drei Stäben entfernt, so daß die Punkte IV, V, VI mit den beiden Stäben 10, 11 übrig bleiben. Dieses Endsystem ist labil; es muß der Stab $\overline{V, VI}$ als Ersatzstab eingefügt werden. Daß das durch solche Stabvertauschung entstandene Gebilde stabil ist, erkennt man sofort: an das sicher starre Dreieck IV, V, VI sind durch je drei Stäbe die weiteren Knotenpunkte angeschlossen.

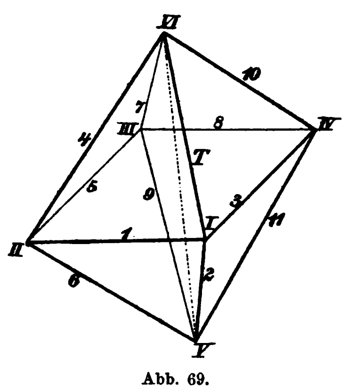
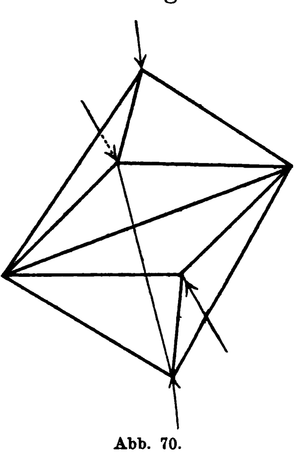


Abb. 69.

Das so erhaltene System wird auch durch die spezielle Hennebergsche Stabvertauschung erhalten, indem man Stab $\overline{I, VI}$ als Stab des Knotenpunktes I betrachtet, diesen entfernt und dafür den Stab $\overline{V, VI}$ einfügt, der ja zwei der vier Punkte II, IV, V, VI verbindet.

42. Die Berechnung eines derartigen Raumsystems, das durch einmalige Stabvertauschung in ein sicher stabiles, gut zu berechnendes Gebilde übergeführt werden kann, geschieht nach den bei ebenen Systemen bereits angegebenen Ausführungen.


Abb. 70.

Man bestimmt in dem reduzierten Fachwerk zunächst alle Spannungen infolge der wirklich vorhandenen äußeren Kräfte (Abb. 70); sie seien mit ${}_0S_i$ bezeichnet bezw. für den Ersatzstab mit ${}_0S_e$. Dann wird in Richtung des fortgenommenen Stabes eine beliebige Kraft K (Kraft im störenden Stab, Tauschstab) als Zug oder Druck angenommen, der Stab entfernt und diese Kraft an den Endpunkten eingeführt (Abb. 71); die sich nun ergebenden Spannungen seien S_i' bezw. S_e'. In Wirk-

lichkeit wird die im vorliegenden System im Stab T vorhandene Spannung kaum mit K übereinstimmen, vielmehr ein gewisses Vielfache betragen, also $\lambda \cdot K$ sein, und die durch diese wirkliche Spannung allein in den übrigen Stäben entstehenden Kräfte werden demgemäß $\lambda \cdot S_i'$ sein.

Da nun die äußeren Kräfte auch wirken, so ergibt sich in den einzelnen Stäben eine Spannung:

$$S_i = {}_0S_i + \lambda \cdot S_i',$$

wobei λ durch die Bedingung bestimmt ist, daß bei wirklichem Spannungsbild im Ersatzstab die Spannung Null herrschen muß, daß also:

$$0 = {}_0S_e + \lambda \cdot S_e'.$$

Demnach ist:

$$\lambda = -\frac{{}_0S_e}{S_e'}.$$

Abb. 71.

Man erkennt, daß die Spannungen S_i eines gegebenen Systems eindeutig und endlich sind, wenn

$$S_e' \gtrless = 0.$$

Wählt man von vornherein $K = 1$, sodaß S_i' die Spannung der einzelnen Stäbe infolge der Kraft 1 in Richtung des Tauschstabes bedeutet, dann ist λ gleich der wirklichen Spannung T im Tauschstabe und es entsteht:

$$S_i = {}_0S_i + T \cdot S_i'.$$

43. Es sei weiter das System nach Abb. 72 betrachtet, das eine zweifache Stabvertauschung erfordert. Das System besitzt die richtige Stabzahl; denn, wenn man z. B. die Stäbe T_1 und T_2 entfernt, dafür die zwei Ersatzstäbe $\overline{X, XII}$ und $\overline{XI, XII}$ einzieht, erhält man ein System nach dem ersten Bildungsgesetz: an das Dreieck X, XI, XII sind durch je drei Stäbe angeschlossen die Knotenpunkte IX, VIII, VII, VI, V, IV, III, II, I. Diese Ersatzstäbe findet man mit der angegebenen Regel, indem man sich nach Wegnahme von T_1, T_2 die Knotenpunkte I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX mit jedesmal drei Stäben ent-

fernt denkt und so als labiles Endsystem den Stab $\overline{\text{X, XI}}$ (28) mit den Knotenpunkten X, XI und dem außerhalb liegenden Systempunkt XII erhält. Dieses System muß durch Stabergänzung in ein stabiles verwandelt werden: also ist nötig Stab $\overline{\text{X, XII}}$ und $\overline{\text{XI, XII}}$. Man kann demgemäß die Stäbe $\overline{\text{I, III}}$ und $\overline{\text{I, VI}}$ mit $\overline{\text{X, XII}}$ und $\overline{\text{XI, XII}}$ vertauschen.

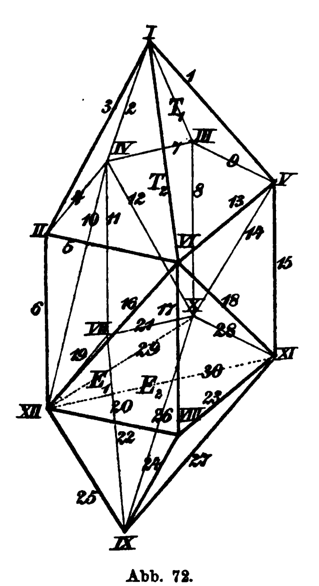


Abb. 72.

Nach der speziellen Henneberg-schen Regel ist es bei diesem Beispiel nicht möglich, mit einer zweifachen Stabvertauschung ein einfaches Fachwerk zu erhalten; aber selbstverständlich ist es mit mehrfacher Stabvertauschung unbedingt ausführbar. Man erkennt hieran, daß man vielfach mit der Regel der reinen Stabvertauschung rascher zum Ziele gelangen kann.

Aber wie man nun auch die Reduktion vorgenommen haben mag, die Berechnung geschieht immer auf die gleiche Weise, wie sie im wesentlichen von Henneberg angegeben wurde.

§ 14. Mehrfache Stabvertauschungen. Methode der Knotenpunktsbedingungen.

44. Gewöhnlich kann man bei einiger Übung mittels der Stabvertauschungen die Frage nach der richtigen Stabzahl schneller erledigen, als durch Nachzählen. Ob dann das gegebene System bei richtiger Stabzahl auch stabil ist, das hängt von weiterer Untersuchung ab, bei einfacher Stabvertauschung vom Werte S_e', bei mehrfacher von einer gewissen Determinante D, wie dies schon bei den ebenen Systemen erwähnt wurde.

Allgemein gestaltet sich das Verfahren der Stabvertauschung für ein Stabsystem mit $(3n - 6)$ Stäben, das durch $m$fache

Stabvertauschung in ein solches übergeführt werden kann, dessen Spannungen in einfacher Weise zu ermitteln sind, folgendermaßen: Die Spannungen der als störend betrachteten Tauschstäbe seien mit $T_1, T_2 \cdots T_m$ bezeichnet, diejenigen der Ersatzstäbe mit ${}_1S_e, {}_2S_e \cdots {}_mS_e$.

Man ermittelt nun die Spannungen im verwandelten stabilen System, die entstehen:

infolge der äußeren Belastungen:

$$S_i^0,\ {}_1S_e^0,\ {}_2S_e^0 \cdots {}_mS_e^0,$$

infolge der willkürlichen Spannung K_1 in Richtung von T_1:

$$S_i',\ {}_1S_e' \cdots {}_mS_e',$$

infolge der willkürlichen Spannung K_2 (Richtung T_2):

$$S_i'',\ {}_1S_e'',\ {}_2S_e'' \cdots {}_mS_e''$$

usw., schließlich

infolge K_m (Richtung T_m):

$$S_i^{(m)},\ {}_1S_e^{(m)} \cdots {}_mS_e^{(m)}.$$

Die Spannung eines beliebigen Stabes ist dann durch einen Ausdruck bestimmt von der Form:

$$S_i = S_i^0 + \lambda_1 \cdot S_i' + \lambda_2 \cdot S_i'' + \cdots + \lambda_m \cdot S_i^{(m)}, \qquad (34)$$

wobei die Werte $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ aus den m Bedingungen ermittelt werden, daß in den Ersatzstäben die Spannung Null herrscht:

$$\left.\begin{array}{l} {}_1S_e^0 + \lambda_1 \cdot {}_1S_e' + \lambda_2 \cdot {}_1S_e'' + \cdots + \lambda_m \cdot {}_1S_e^{(m)} = 0 \\ {}_2S_e^0 + \lambda_1 \cdot {}_2S_e' + \lambda_2 \cdot {}_2S_e'' + \cdots + \lambda_m \cdot {}_2S_e^{(m)} = 0 \\ \vdots \\ {}_mS_e^0 + \lambda_1 \cdot {}_mS_e' + \lambda_2 \cdot {}_mS_e'' + \cdots + \lambda_m \cdot {}_mS_e^{(m)} = 0. \end{array}\right\} \qquad (35)$$

Es ergibt sich demnach:

$$\lambda_1 = \frac{D_1}{D},\ \lambda_2 = \frac{D_2}{D} \cdots \lambda_r = \frac{D_r}{D} \cdots \lambda_m = \frac{D_m}{D}, \qquad (36)$$

wenn D die Determinante des Systems der m Gleichungen (35) bedeutet, D_r eine solche, die an Stelle der Kolonne der Koeffizienten von λ_r diejenige der negativen absoluten Glieder enthält.

Das gegebene Fachwerk ist stabil, solange $D \gtrless 0$ ist, da dann die Spannungen sämtlicher Stäbe endlich und eindeutig

werden. Wollte man ohne Stabvertauschung das betreffende Raumsystem untersuchen, so wäre eine Determinante vom $(3n-6)$. Grade aufzustellen; durch die $m$fache Stabvertauschung wird die Determinante auf den m. Grad reduziert.[1])

45. Sind die zu untersuchenden Stabsysteme so gebildet, daß an einen sicher stabilen Teil weitere Knotenpunkte angeschlossen sind,[2]) so lassen sich passende Ersatzstäbe im angeschlossenen Teil dadurch finden, daß man sich in diesem die störenden Stäbe und nach und nach dreifache Knotenpunkte weggenommen denkt, bis man zu solchen Knotenpunkten in diesem Teile kommt, die nicht mehr durch drei Stäbe angeschlossen sind; diese Punkte haben dann gegenüber dem für sich starren Teil keine unverschiebliche Lage; es sind demgemäß Stäbe derart einzuziehen, daß sie eine feste Lage erhalten.

Um bei nebenstehendem System (Abb. 73), das in dieser Weise gebildet ist, passende Ersatzstäbe zu erhalten, mögen T_1 und T_2 als störend aufgefaßt werden. Nach ihrer Entfernung kann man Knotenpunkt I streichen mit den Stäben 1, 2, 3, dann II mit 4, 5, 6, weiter III und IV mit 7, 8, 9 bezw. 10, 11, 12. Von dem angefügten Teil bleiben noch übrig Knotenpunkt V mit 13, 14 und VI mit 15, 16. Beide Punkte haben eine verschiebliche Lage gegenüber dem unteren starren Teil; es sind neue Stäbe einzufügen, um ihre Lage zu sichern, also z. B. E_1 und E_2. Werden demgemäß im vorliegenden System T_1 und T_2 mit E_1 und E_2 vertauscht, so entsteht ein sicher stabiles Fachwerk, denn VI und V sind durch je drei Stäbe an den unteren festen Teil angeschlossen und dann

[1]) Die hier gewonnene Determinante könnte man an Stelle derjenigen unter (31) benützen, um zu zeigen, daß jedes System mit $(3n-6)$ Stäben statisch bestimmt ist, wenn für irgend eine Belastung nur eindeutige und endliche Spannungen auftreten.

[2]) Alle „gestützten" Fachwerke lassen sich in dieser Weise darstellen (vgl. § 20). Selbstverständlich läßt sich auch für derartige Systeme die spezielle Henneberg'sche Reduktion verwenden, ohne den unteren Teil zu benützen.

sind weiter unverschieblich angefügt: IV, III, II, I. Damit ist gezeigt, daß das gegebene System die richtige Stabzahl hat; um zu untersuchen, ob es auch sicher starr ist, wäre noch die Determinante D der Stabvertauschung aufzustellen.

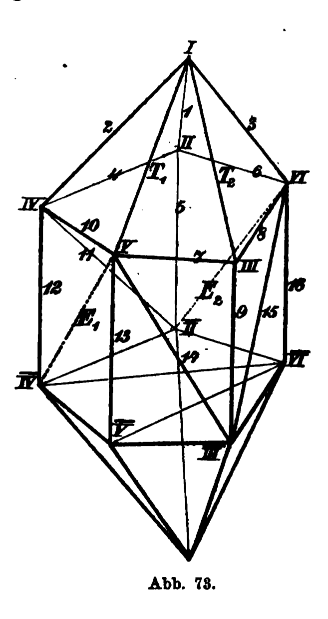


Abb. 73.

46. Das Wesentliche für die Berechnung nach der Henneberg-schen Methode ist die Bestimmung der Spannungen $T_1 \cdots T_m$ in den störenden Stäben mittels der m Bedingungen, daß in den Ersatzstäben die Spannung Null herrscht. Die Einführung der Multiplikatoren zu diesem Zweck hat den Vorteil, daß sich die Ausnahmefälle in einfacher Weise ausdrücken lassen, und daß die Aufgabe übersichtlich zeichnerisch[1]) zu lösen ist. Selbstverständlich kann man aber auch, wie schon bei den ebenen Systemen erwähnt, direkt mit den unbekannten Spannungen der störenden Stäbe rechnen, indem man dieselben als äußere Kräfte einführt, die zusammen mit den gegebenen Lasten auf das reduzierte System wirken.

Im vorliegenden Beispiel würde also das reduzierte Fachwerk — d. h. das System mit Ersatzstäben — beansprucht von den äußeren Lasten und den Kräften T_1 an den Punkten I und V und T_2 an I und III, die man zunächst als vom Knotenpunkt abstrebend einführt. Dann lassen sich der Reihe nach die Spannungen der Stäbe 1—12 darstellen als:

$$S_i = F_i(P_1 \cdots P_n, \; T_1, \; T_2) \tag{37}$$

und ebenso die Kräfte der Ersatzstäbe. Da aber in letzteren die Spannung Null herrschen muß, so erhält man zwei Be-

[1]) Zeichnerische Lösungen haben für die Raumfachwerke nicht die große Bedeutung, wie für ebene.

dingungsgleichungen mit zwei unbekannten T_1, T_2, die demnach zu berechnen sind. Hiermit sind dann sofort alle Spannungen S_i gegeben.

Statt der Bedingungen: die Spannungen der Ersatzstäbe müssen Null sein, lassen sich entsprechend den Angaben bei ebenen Systemen auch bei den räumlichen Fachwerken deren andere aufstellen: Man führt wiederum die Spannungen der störenden Stäbe als äußere Kräfte T_1, T_2 ein, geht nach und nach alle Knotenpunkte mit drei unbekannten Spannungen durch, erhält für diese abermals Ausdrücke von der Form:

$$S_i = F(P_1 \cdots P_n, T_1, T_2)$$

und gelangt schließlich zu Knotenpunkten, die zu wenig unbekannte Spannungen aufweisen und demgemäß Bedingungsgleichungen liefern. Im vorliegenden Beispiel wären dies die Punkte V und VI. Bei richtiger Spannung der störenden Stäbe (aber auch nur dann!) muß an diesen Punkten Gleichgewicht herrschen, also die Resultante von 7, 10, T_1, P_{V} (bezw. 3, 6, 8, P_{VI}) in die Ebene der Stäbe 13, 14 (bezw. 15, 16) fallen, oder, anders ausgedrückt, es muß die Summe der Komponenten von 7, 10, T_1, P_{V} (bezw. 6, 8, 3, P_{VI}) in der Richtung senkrecht zur Ebene 13, 14 (bezw. 15, 16) verschwinden. Da nun die verschiedenen Spannungen Funktionen von T_1, T_2 sind, hat man damit zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten gewonnen.

Will man mit den Multiplikatoren λ_1, λ_2 rechnen, so hat man wie bei der gewöhnlichen Stabvertauschung jede Spannung darzustellen in der Form:

$$S_i = {}_0S_i + \lambda_1 \cdot S_i' + \lambda_2 \cdot S_i''$$

und dann an den Punkten V und VI die Bedingungsgleichungen aufzustellen.

Daß die so erhaltenen Gleichungen im wesentlichen auf die hinauslaufen, wonach in den Ersatzstäben die Spannung Null auftreten muß, wurde schon in § 5 betont. Das zuletzt erwähnte Verfahren der Knotenpunktsbedingungen stellt

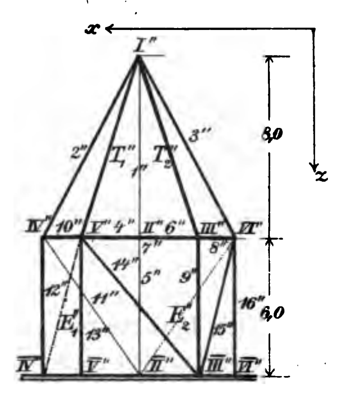
weiter nichts dar, als eine zweckmäßig geordnete Lösung der allgemeinen $(3n - 6)$ Gleichungen mit $(3n - 6)$ Unbekannten.[1])

Legt man eine allgemeine Belastung zu Grunde, indem man in jedem Knotenpunkt die Komponenten X_i, Y_i, Z_i wirken läßt, so ist es natürlich möglich, jede Spannung in der Form auszudrücken:

$$\begin{aligned} S_i = X_1 \cdot \xi_1 + Y_1 \cdot \eta_1 + Z_1 \cdot \zeta_1 + \cdots \\ + X_n \cdot \xi_n + Y_n \cdot \eta_n + Z_n \cdot \zeta_n, \end{aligned} \tag{38}$$

wobei ξ_r, η_r, ζ_r sogenannte Einflußzahlen darstellen, die von der Form des Fachwerks abhängig sind.

Die Stabanordnung nach Abb. 73 möge dies zeigen sowohl unter Zugrundelegung von Ersatzstäben, wie auch der anderen erwähnten Knotenpunktsbedingungen. In ersterem Fall sollen die Multiplikatoren eingeführt, im letzteren dagegen möge direkt mit den Spannungen T_1, T_2 gerechnet werden, um zu zeigen, daß beide Verfahren sich vollständig decken. Zu bestimmen sind die Stabspannungen im oberen Teil.



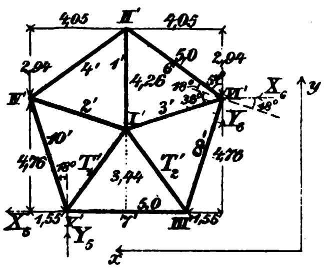


Abb. 74.

§ 15. Beispiel zu den Verfahren des vorigen Paragraphen.

47. Die verschiedenen Maße, die das Stabgebilde festlegen, sind in Abb. 74 angegeben; die Längen der Stäbe betragen:

---

[1]) Direkt mit Knotenpunktsbedingungen wurde wohl zuerst von Föppl gerechnet, Zentralbl. 1901, S. 487, allgemein von Mohr, ebenda 1902, S. 634, Müller-Breslau, Zentralbl. 1903. — Vgl. die Ausführungen in § 17 (Mohrsches Verfahren).

$$s_1 = s_2 = s_3 = t_1 = t_2 = \sqrt{4{,}26^2 + 8^2} = 9{,}06 \text{ m},$$
$$s_4 = s_6 = s_7 = s_8 = s_{10} = \quad 5{,}00 \text{ m},$$
$$s_{14} = s_{15} = s_{11} = \quad 7{,}81 \text{ m}.$$

Zunächst möge die Methode der Knotenpunktsbedingungen verwendet werden, wobei T_1, T_2 als äußere Kräfte einzuführen sind, die an den Knotenpunkten I, V bezw. I, III wirken. Demgemäß greifen an Punkt I als Lasten die Kräfte an: X_1, Y_1, Z_1, T_1, T_2, so daß die Summe der Komponenten in der x-, y-, z-Richtung gegeben ist durch:

$$\Xi_1 = X_1 + T_1 \cdot \frac{x_5 - x_1}{s_{15}} + T_2 \cdot \frac{x_3 - x_1}{s_{13}} = X_1 + \frac{2{,}5}{9{,}06} \cdot T_1 - \frac{2{,}5}{9{,}06} \cdot T_2$$
$$= X_1 + 0{,}275\, T_1 - 0{,}275\, T_2 ,$$

$$H_1 = Y_1 + T_1 \cdot \frac{y_5 - y_1}{s_{15}} + T_2 \cdot \frac{y_3 - y_1}{s_{13}} = Y_1 - T_1 \cdot \frac{3{,}44}{9{,}06} - \frac{3{,}44}{9{,}06} \cdot T_2$$
$$= Y_1 - 0{,}38\ \ T_1 - 0{,}38\ \ T_2 ,$$

$$Z_1 = Z_1 + T_1 \cdot \frac{z_5 - z_1}{s_{15}} + T_2 \cdot \frac{z_3 - z_1}{s_{13}} = Z_1 + \frac{8{,}0}{9{,}06} \cdot T_1 + \frac{8{,}0}{9{,}06} \cdot T_2$$
$$= Z_1 + 0{,}883\, T_1 + 0{,}883\, T_2 .$$

Zur Berechnung der drei unbekannten Spannungen S_1, S_2, S_3 mögen die allgemeinen Gleichungen (24) benützt werden, wobei zur Aufstellung der Determinante zu bedenken ist, daß jetzt:

$$Dx_1 = x_2 - x_1, \quad Dx_2 = x_4 - x_1, \quad Dx_3 = x_6 - x_1, \cdots,$$

da die Werte der ersten Kolonne der Determinante sich nun
auf Stab 2, 1, (Spannung S_1), beziehen,
diejenigen der zweiten Kolonne auf Stab 4, 1, (S_2),
diejenigen der dritten Kolonne auf Stab 6, 1, (S_3).

Für Knotenpunkt I findet sich demgemäß:

$$\begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 \end{matrix}$$
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 4{,}05 & -4{,}05 \\ 4{,}26 & 1{,}32 & 1{,}32 \\ 8 & 8 & 8 \end{vmatrix} = -4{,}26\,(4{,}05 \cdot 8 + 4{,}05 \cdot 8) + 8 \cdot (2 \cdot 4{,}05 \cdot 1{,}32)$$
$$= -190{,}53 .$$

Es ist also nach Gleichungsgruppe (24) S_1 gegeben durch:

$$\frac{S_1}{9{,}06} = \frac{-\Xi_1 \cdot 0 + H_1 \cdot (2 \cdot 4{,}05 \cdot 8) - Z_1 \cdot (2 \cdot 4{,}05 \cdot 1{,}32)}{-190{,}53}$$

$$= \frac{-H_1 \cdot 64{,}8 + Z_1 \cdot 10{,}69}{190{,}53},$$

$$S_1 = \frac{-64{,}8\,(Y_1 - 0{,}38\,T_1 - 0{,}38\,T_2) + 10{,}69\,(Z_1 + 0{,}883\,T_1 + 0{,}883\,T_2)}{21{,}03}$$

$$= \frac{34{,}06\,T_1 + 34{,}06\,T_2 - 64{,}8\,Y_1 + 10{,}69\,Z_1}{21{,}03},$$

$$S_1 = 1{,}62\,T_1 + 1{,}62\,T_2 - 3{,}08\,Y_1 + 0{,}51\,Z_1. \tag{39a}$$

Entsprechend ist:

$$S_2 = \frac{+\Xi_1 \cdot (4{,}26 \cdot 8 - 1{,}32 \cdot 8) - H_1 \cdot (4{,}05 \cdot 8) + Z_1 \cdot (+4{,}05 \cdot 4{,}26)}{-21{,}03}$$

$$= \frac{-23{,}52 \cdot \Xi_1 + 32{,}4\,H_1 - 17{,}25\,Z_1}{+21{,}03};$$

oder mit Einsetzung der Werte für Ξ_1, H_1, Z_1:

$$S_2 = \frac{-23{,}52 \cdot X_1 + 32{,}4\,Y_1 - 17{,}25\,Z_1 - 33{,}97\,T_1 - 21{,}03\,T_2}{+21{,}03}$$

$$= -1{,}12\,X_1 + 1{,}54\,Y_1 - 0{,}82\,Z_1 - 1{,}61\,T_1 - T_2. \tag{39b}$$

$$S_3 = \frac{-\Xi_1 \cdot (4{,}26 \cdot 8 - 1{,}32 \cdot 8) + H_1 \cdot (0 \cdot 8 - 4{,}05 \cdot 8) - Z_1 \cdot (0 - 4{,}05 \cdot 4{,}26)}{-21{,}03}$$

$$= \frac{23{,}52 \cdot \Xi_1 + 32{,}4\,H_1 - 17{,}25\,Z_1}{+21{,}03},$$

$$S_3 = \frac{23{,}52\,X_1 + 32{,}4\,Y_1 - 17{,}25\,Z_1 - 21{,}03\,T_1 - 33{,}97\,T_2}{21{,}03}$$

$$= +1{,}12\,X_1 + 1{,}54\,Y_1 - 0{,}82\,Z_1 - T_1 - 1{,}61\,T_2. \tag{39c}$$

An den anderen Knotenpunkten ist in ähnlicher Weise zu verfahren.

Knotenpunkt II.

$$\Xi_2 = \frac{S_1}{s_1} \cdot (x_1 - x_2) + X_2 = \quad 0 \quad + X_2 = X_2.$$

$$H_2 = \frac{S_1}{s_1} \cdot (y_1 - y_2) + Y_2 = -\frac{4{,}26}{9{,}06} \cdot S_1 + Y_2 = Y_2 - 0{,}47 \cdot S_1.$$

$$Z_2 = \frac{S_1}{s_1} \cdot (z_1 - z_2) + Z_2 = -\frac{8}{9{,}06} \cdot S_1 + Z_2 = Z_2 - 0{,}88 \cdot S_1.$$

Für die Determinante ergibt sich nun:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4{,}05 & 0 & -4{,}05 \\ -2{,}94 & 0 & -2{,}94 \\ 0 & 6{,}0 & 0 \end{vmatrix} = -0+0-6(-4{,}05\cdot 2{,}94-4{,}05\cdot 2{,}94) = +142{,}92.$$

(Spalten: S_4, S_5, S_6)

Weiter ist:

$$\frac{S_4}{5{,}0} = \frac{-\Xi_2\cdot 6\cdot 2{,}94 + H_2\cdot 4{,}05\cdot 6 - Z_2\cdot 0}{142{,}92} = \frac{-17{,}64\,\Xi_2 + 24{,}3\,H_2}{142{,}92},$$

$$\frac{S_5}{6{,}0} = \frac{\Xi_2\cdot 0 - H_2\cdot 0 + Z_2\,(-4{,}05\cdot 2{,}94 - 4{,}05\cdot 2{,}94)}{142{,}92} = -\frac{Z_2}{6},$$

$$\frac{S_6}{5{,}0} = \frac{-\Xi_2\,(-2{,}94\cdot 6-0) + H_2\,(4{,}05\cdot 6-0) - Z_2\cdot 0}{142{,}92} = \frac{+17{,}64\,\Xi_2 + 24{,}3\,H_2}{142{,}92}.$$

Mit Einsetzung der Werte für Ξ_2, H_2, Z_2 und S_1 findet sich:

$$S_4 = \frac{1}{28{,}58}\Big\{-17{,}64\,X_2 + 24{,}3\Big[Y_2 - \frac{0{,}47}{21{,}03}\cdot(34{,}06\,T_1 + 34{,}06\,T_2 - 64{,}8\,Y_1 + 10{,}69\,Z_1)\Big]\Big\}.$$

$$\left.\begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{28{,}58}\big\{-17{,}64\,X_2 + 24{,}3\,Y_2 - 18{,}47\,T_1 - 18{,}47\,T_2 + 35{,}1\,Y_1 - 5{,}81\,Z_1\big\} \\ S_5 &= -\big\{Z_2 - 1{,}396\,T_1 - 1{,}396\,T_2 + 2{,}66\,Y_1 - 0{,}438\,Z_1\big\} \\ S_6 &= \frac{1}{28{,}58}\big\{17{,}64\,X_2 + 24{,}3\,Y_2 - 18{,}47\,T_1 - 18{,}47\,T_2 + 35{,}1\,Y_1 - 5{,}81\,Z_1\big\}. \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Knotenpunkt III.

$$\Xi_3 = X_3 + T_2\cdot\frac{2{,}5}{9{,}06} = X_3 + 0{,}276\cdot T_2.$$

$$H_3 = Y_3 + T_2\cdot\frac{3{,}44}{9{,}06} = Y_3 + 0{,}38\cdot T_2.$$

$$Z_3 = Z_3 + T_2\cdot\frac{-8{,}0}{9{,}06} = Z_3 - 0{,}88\cdot T_2.$$

Die maßgebende Determinante ist gegeben durch:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} S_7 & S_8 & S_9 \\ 5 & -1{,}55 & 0 \\ 0 & 4{,}76 & 0 \\ 0 & 0 & 6{,}0 \end{vmatrix} = 5 \cdot (4{,}76 \cdot 6 - 0) - 0 - 0 = 142{,}80,$$

und demnach die Stabspannungen:

$$\frac{S_7}{5} = \frac{-\Xi_3 \cdot (4{,}76 \cdot 6 - 0) + H_3 \cdot (-1{,}55 \cdot 6 - 0) - Z_3 \cdot 0}{142{,}8} = \frac{-28{,}56\,\Xi_3 - 9{,}30\,H_3}{142{,}8},$$

$$\frac{S_8}{5} = \frac{+\Xi_3 \cdot 0 - H_3 \cdot 5 \cdot 6 + Z_3 \cdot 0}{142{,}8} = \frac{-15{,}0\,H_3}{71{,}4},$$

$$\frac{S_9}{6} = \frac{-\Xi_3 \cdot 0 + H_3 \cdot 0 - Z_3 \cdot 5 \cdot 4{,}76}{142{,}8} = \frac{-11{,}9\,Z_3}{71{,}4}.$$

Beim Einsetzen der oben angegebenen Werte für Ξ_3, H_3, Z_3 findet sich alsdann:

$$\left.\begin{aligned} S_7 &= -1{,}0 \cdot X_3 - 0{,}33 \cdot Y_3 - 0{,}40\,T_2, \\ S_8 &= -1{,}05 \cdot Y_3 \qquad\qquad - 0{,}399\,T_2, \\ S_9 &= -1{,}002 \cdot Z_3 \qquad\qquad + 0{,}882\,T_2. \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Knotenpunkt IV.

Die auf die drei Stäbe S_{10}, S_{11}, S_{12} einwirkenden Kräfte sind ausgedrückt durch:

$$\Xi_4 = S_2 \cdot \frac{-4{,}05}{9{,}06} + S_4 \cdot \frac{-4{,}05}{5} + X_4,$$

$$H_4 = S_2 \cdot \frac{-1{,}32}{9{,}06} + S_4 \cdot \frac{2{,}94}{5} + Y_4,$$

$$Z_4 = S_2 \cdot \frac{-8{,}0}{9{,}06} + S_4 \cdot \frac{0}{5} + Z_4.$$

Werden für S_2 und S_4 die bereits ermittelten Werte eingesetzt, so ergibt sich:

$$\Xi_4 = 0{,}49\,X_1 - 1{,}66\,Y_1 + 0{,}52\,Z_1 + 0{,}49\,X_2 - 0{,}68\,Y_2 + X_4 + 1{,}23\,T_1 + 0{,}96\,T_2,$$

$$H_4 = 0{,}16\,X_1 - 0{,}97\,Y_1 + 0{,}24\,Z_1 + 0{,}37\,X_2 - 0{,}51\,Y_2 + Y_4 + 0{,}63\,T_1 + 0{,}54\,T_2,$$

$$Z_4 = 0{,}99\,X_1 - 1{,}36\,Y_1 + 0{,}72\,Z_1 + Z_4 + 1{,}43\,T_1 + 0{,}88\,T_2.$$

Die auf Knotenpunkt IV bezogene Determinante lautet:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} S_{10} & S_{11} & S_{12} \\ -1{,}55 & -4{,}05 & 0 \\ -4{,}76 & +2{,}94 & 0 \\ 0 & +6 & +6 \end{vmatrix} = +6\cdot(-1{,}55\cdot 2{,}94 - 4{,}05\cdot 4{,}76) = -143{,}01.$$

Demnach ist:

$$\frac{S_{10}}{5} = \frac{-\Xi_4\cdot 2{,}94\cdot 6 + H_4\cdot(-4{,}05\cdot 6) - Z_4\cdot 0}{-143{,}01},$$

$$\frac{S_{11}}{7{,}81} = \frac{+\Xi_4\cdot(-4{,}76\cdot 6) - H_4\cdot(-1{,}55\cdot 6) + Z_4\cdot 0}{-143{,}01},$$

$$\frac{S_{12}}{6} = \frac{-\Xi_4\cdot(-4{,}76\cdot 6{,}0) + H_4\cdot(-1{,}55\cdot 6) - Z_4\cdot(-1{,}55\cdot 2{,}94 - 4{,}05\cdot 4{,}76)}{-143{,}01},$$

oder:

$$S_{10} = 0{,}617\cdot\Xi_4 + 0{,}85\cdot H_4,$$
$$S_{11} = 1{,}56\cdot\Xi_4 - 0{,}51\cdot H_4,$$
$$S_{12} = -1{,}20\cdot\Xi_4 + 0{,}39\cdot H_4 - Z_4.$$

Bei Berücksichtigung der für Ξ_4, H_4, Z_4 angegebenen Werte erhält man:

$$\left.\begin{aligned} S_{10} &= 0{,}44\,X_1 + 0{,}61\,X_2 + 0{,}62\,X_4 - 1{,}85\,Y_1 - 0{,}85\,Y_2 + 0{,}85\,Y_4 \\ &\quad + 0{,}52\,Z_1 + 1{,}29\,T_1 + 1{,}05\,T_2, \\ S_{11} &= 0{,}68\,X_1 + 0{,}57\,X_2 + 1{,}56\,X_4 - 2{,}10\,Y_1 - 0{,}80\,Y_2 - 0{,}51\,Y_4 \\ &\quad + 0{,}69\,Z_1 + 1{,}60\,T_1 + 1{,}22\,T_2, \\ S_{12} &= -1{,}52\,X_1 - 0{,}45\,X_2 - 1{,}20\,X_4 + 2{,}09\,Y_1 + 0{,}62\,Y_2 + 0{,}39\,Y_4 \\ &\quad - 1{,}24\,Z_1 - 1{,}00\,Z_4 - 2{,}66\,T_1 - 1{,}82\,T_2. \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Es sind nun alle Knotenpunkte verwendet worden, von denen der Reihe nach je drei unbekannte Spannungen ausgehen.[1]) An den noch übrig bleibenden Punkten V und VI laufen nur noch je zwei unbekannte Stabkräfte S_{13}, S_{14} bezw.

[1]) Daß sich diese verschiedenen Berechnungen bei der speziellen Anordnung des Beispiels mit der Momentenmethode hätten bequem durchführen lassen, braucht wohl nicht betont zu werden. Hier handelte es sich darum, das durch die allgemeine Methode gegebene Schema anzuwenden

S_{15}, S_{16} zusammen; diese sind nach früheren Ausführungen zur Aufstellung von Bedingungsgleichungen für Ermittlung der Unbekannten T_1, T_2 zu benützen.

An Knotenpunkt V muß die Summe der Komponenten von T_1, S_{10}, S_7, X_5, Y_5, Z_5 in der Richtung senkrecht zur Ebene (13, 14) den Wert Null ergeben. Da S_7, X_5, Z_5 in der fraglichen Ebene liegen, liefern sie keinen Komponentenbeitrag in der betreffenden Gleichung, und man erhält:

$$T_1 \cdot \cos\gamma \cdot \cos 36^0 + S_{10} \cdot \cos 18^0 + Y_5 = 0,$$

wenn γ den Winkel zwischen T_1 und der horizontalen Ebene bedeutet.

An Knotenpunkt VI muß die Summe der Komponenten in Richtung senkrecht zu (15, 16), also in der zu S_8 senkrecht gerichteten horizontalen Linie, verschwinden. S_8 und Z_6 liegen in der Ebene (15, 16), haben also in der betreffenden Richtung keine Komponente, und es ergibt sich die Gleichung:

$$S_8 \cdot \cos\gamma \cdot \cos 36^0 + S_6 \cdot \cos 18^0 + Y_6 \cdot \cos 72^0 + X_6 \cdot \cos 18^0 = 0.$$

Setzt man für die trigonometrischen Funktionsgrößen ihre Zahlenwerte ein und bedenkt, daß:

$$\cos\gamma = \frac{4{,}26}{9{,}06} = 0{,}47$$

ist, so bekommt man zur Bestimmung von T_1 und T_2 folgende beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}38\, T_1 + 0{,}95\, S_{10} + Y_5 = 0, \\ 0{,}38\, S_8 + 0{,}95\, S_6 + 0{,}31\, Y_6 + 0{,}95\, X_6 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Da S_8, S_6, S_{10} durch die oben erhaltenen Formeln (39, 40, 42) durch T_1, T_2 und die bekannten äußeren Kräfte ausgedrückt sind, so enthalten diese Gleichungen außer T_1, T_2 nur bekannte Werte, so daß die Unbekannten berechnet werden können.

48. Bevor darauf eingegangen wird, möge die Methode der Stabvertauschung zur Aufstellung der Bedingungsgleichungen für T_1 und T_2 benützt werden. Als Ersatzstäbe werden eingeführt die Stäbe von V nach $\overline{\text{IV}}$ und von VI nach $\overline{\text{II}}$.

Man hätte nun nach den Ausführungen auf S. 99 für die Stäbe des durch die Ersatzstäbe gewonnenen reduzierten Fachwerkes die Spannungen ${}_0S_i$, S_i', S_i'' zu ermitteln, die entstehen durch die äußere Last, durch $T_1 = 1$ und $T_2 = 1$, und dann zu bilden:

$$S_i = {}_0S_i + T_1 \cdot S_i' + T_2 \cdot S_i''.$$

Die so sich ergebenden Ausdrücke stimmen aber für $S_1 \cdots S_{12}$ mit den bereits oben gefundenen (39—42) überein; denn es wurde eingeführt als Belastung gleichzeitig die äußere Last, die Spannung T_1 und T_2; demnach ist in den Gleichungen für $S_1 \cdots S_{12}$ der Koeffizient von T_1 bezw. T_2 direkt der Wert S_i', S_i'', während die übrigen Glieder die Wirkung der gegebenen äußeren Last darstellen, also ${}_0S_i$ bedeuten. Zur Bestimmung von T_1, T_2 ist nun die Bedingung zu verwenden, daß in den Ersatzstäben die Spannung Null herrschen muß. Man stellt deshalb für ${}_1S_e$ und ${}_2S_e$ auf Grund der Knotenpunkte V, VI — bei denen ja mit dem Ersatzstab drei unbekannte Spannungen vorliegen — nach dem üblichen Verfahren einen Ausdruck auf und setzt ihn gleich Null.

An Punkt V wirken von oben her die Spannungen S_{10}, S_7, ferner die Kraft T_1, sowie X_5, Y_5, Z_5; es ist also:

$$\begin{aligned}
\Xi_5 &= T_1 \cdot \frac{-2,5}{9,06} + S_{10} \cdot \frac{1,55}{5,0} + S_7 \cdot \frac{-5,0}{5,0} + X_5 \\
&= -0,28\, T_1 + 0,31\, S_{10} - S_7 + X_5, \\
H_5 &= T_1 \cdot \frac{3,44}{9,06} + S_{10} \cdot \frac{4,76}{5,0} + S_7 \cdot 0 + Y_5 \\
&= +0,38\, T_1 + 0,95\, S_{10} + 0 \cdot S_7 + Y_5, \\
Z_5 &= T_1 \cdot \frac{-8,0}{9,06} + S_{10} \cdot 0 + S_7 \,.\, 0 + Z_5 \\
&= -0,88\, T_1 + 0 \cdot S_{10} + 0 \cdot S_7 + Z_5.
\end{aligned}$$

Die maßgebende Determinante lautet:

$$\begin{matrix} {}_1S_e & S_{13} & S_{14} \end{matrix}$$

$$\varDelta_5 = \begin{vmatrix} +1,55 & 0 & -5,0 \\ +4,76 & 0 & 0 \\ +6 & +6 & +6 \end{vmatrix} = 1,55 \cdot 0 - 4,76 \cdot 30,0 + 0 = -142,8.$$

Für ${}_1S_e$ findet sich demgemäß:

$$\frac{{}_1S_e}{{}_1s_e} = \frac{-\Xi_5 \cdot 0 + H_5 \cdot 30{,}0 + Z_5 \cdot 0}{-142{,}8}$$

$$= -0{,}21\,H_5 = -0{,}21 \cdot (+0{,}38\,T_1 + 0{,}95\,S_{10} + Y_5).$$

Knotenpunkt VI liefert einen entsprechenden Ausdruck für ${}_2S_e$. Es ist:

$$\Xi_6 = S_3 \cdot \frac{4{,}05}{9{,}06} + S_6 \cdot \frac{4{,}05}{5} + S_8 \cdot \frac{1{,}55}{5} + X_6$$

$$= 0{,}45\,S_3 + 0{,}81\,S_6 + 0{,}31\,S_8 + X_6,$$

$$H_6 = S_3 \cdot \frac{-1{,}32}{9{,}06} + S_6 \cdot \frac{2{,}94}{5} + S_8 \cdot \frac{-4{,}76}{5} + Y_6$$

$$= -0{,}146\,S_3 + 0{,}59\,S_6 - 0{,}95\,S_8 + Y_6,$$

$$Z_6 = S_3 \cdot \frac{-8}{9{,}06} + S_6 \cdot 0 + S_8 \cdot 0 + Z_6$$

$$= -0{,}88\,S_3 + 0 \cdot S_6 + 0 \cdot S_8 + Z_6.$$

Die notwendige Determinante ist gegeben durch:

$$\begin{matrix} {}_2S_e & S_{16} & S_{15} \end{matrix}$$

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} 4{,}05 & 0 & 1{,}55 \\ 2{,}94 & 0 & -4{,}76 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -6 \cdot (-4{,}05 \cdot 4{,}76 - 1{,}55 \cdot 2{,}94) = +143{,}04$$

und für ${}_2S_e$ erhält man:

$$\frac{{}_2S_e}{{}_2s_e} = \frac{-\Xi_6 \cdot (0 + 6 \cdot 4{,}76) + H_6 \cdot (0 \cdot 6 - 1{,}55 \cdot 6) - Z_6 \cdot 0}{143{,}04}$$

$$= \frac{-28{,}56\,\Xi_6 - 9{,}30\,H_6}{143{,}04},$$

oder bei Einsetzung der Werte für Ξ_6 und H_6:

$$-\frac{143{,}04}{{}_2s_e} \cdot {}_2S_e = 11{,}45\,S_3 + 28{,}61\,S_6 + 28{,}56\,X_6 + 9{,}3\,Y_6.$$

Nun muß aber bei den richtigen Werten T_1, T_2 in den Ersatzstäben die Spannung Null herrschen, also ist:

$$0{,}38\,T_1 + 0{,}95\,S_{10} + Y_5 = 0,$$

$$11{,}45\,S_3 + 28{,}61\,S_6 + 28{,}56\,X_6 + 9{,}3\,Y_6 = 0.$$

Die so erhaltenen Bedingungsgleichungen stimmen mit den früher gewonnenen (43) überein, wenn man die letzte der beiden mit 0,033 multipliziert; dann findet sich:

$$0{,}38\,S_3 + 0{,}95\,S_6 + 0{,}95\,X_6 + 0{,}307\,Y_6 = 0.$$

Dieses Resultat mußte sich natürlich ergeben; denn wenn im Ersatzstab ${}_1S_e$, bezw. ${}_2S_e$ die Spannung Null herrscht, muß die Summe der Kraftkomponenten von T_1, S_{10}, X_5, Y_5, Z_5 in Richtung senkrecht zu (13, 14) bezw. von S_3, S_6, X_6, Y_6, Z_6 senkrecht zu (15, 16) verschwinden, und das waren ja gerade die früher benützten Bedingungen. Man kann auch geradezu die Ersatzstäbe in diese Richtungen legen, nachdem man sich zu diesem Zweck das untere, für sich stabile Fachwerk nach obenhin derartig ergänzt denkt, daß jeder der neu eingeführten Ersatzstäbe einen Knotenpunkt trifft; alsdann stimmt die Bedingung: „im Ersatzstab muß die Spannung Null herrschen", vollständig überein mit derjenigen, daß die Summe der Komponenten in dieser Richtung verschwinden muß.

49. Nachdem mittels dieser Bedingungsgleichungen die störenden Stabspannungen T_1, T_2 durch die äußeren Kräfte ausgedrückt sind, erlauben die oben angegebenen Gleichungen (39—42) für $S_1 \cdots S_{12}$ sofort diese Spannungen zu ermitteln, und mittels der Knotenpunkte V und VI können die Stabkräfte S_{13}, S_{14}, S_{15}, S_{16} bestimmt werden. Diese Durchrechnung soll ausgeführt werden für den Fall einer nur senkrechten Belastung. Es ist also:

$$X_1 = X_2 = \cdots = X_6 = 0,$$
$$Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_6 = 0,$$

dagegen besitzen die Kräfte Z_i von Null verschiedene Werte. Nach den früheren Gleichungen (39, 40, 42) ist dann:

$$S_3 = -\frac{17{,}25}{21{,}03} Z_1 - T_1 - \frac{33{,}97}{21{,}03} T_2 = -0{,}82\,Z_1 - T_1 - 1{,}61\,T_2,$$

$$S_6 = -\frac{5{,}81}{28{,}58} Z_1 - \frac{18{,}47}{28{,}58} T_1 - \frac{18{,}47}{28{,}58} T_2 = -0{,}203\,Z_1 - 0{,}646\,T_1 - 0{,}646\,T_2,$$

$$S_{10} = 0{,}52\,Z_1 + 1{,}29\,T_1 + 1{,}05\,T_2.$$

Die nun geltenden einfacheren Gleichungen für T_1 und T_2:

$$0{,}38\,T_1 + 0{,}95\,S_{10} = 0,$$
$$0{,}38\,S_3 + 0{,}95\,S_6 = 0$$

gehen demgemäß über in:

$$0{,}38\,T_1 + 0{,}95 \cdot 0{,}52\,Z_1 + 0{,}95 \cdot 1{,}29\,T_1 + 0{,}95 \cdot 1{,}05\,T_2 = 0,$$
$$-\,0{,}38 \cdot 0{,}82\,Z_1 - 0{,}38\,T_1 - 0{,}38 \cdot 1{,}61\,T_2 - 0{,}95 \cdot 0{,}203\,Z_1$$
$$-\,0{,}95 \cdot 0{,}646\,T_1 - 0{,}95 \cdot 0{,}646\,T_2 = 0,$$

oder:

$$1{,}61\,T_1 + 1{,}00\,T_2 + 0{,}49\,Z_1 = 0,$$
$$0{,}99\,T_1 + 1{,}23\,T_2 + 0{,}50\,Z_1 = 0,$$

und liefern für T_1 und T_2 die Ausdrücke:

$$(1{,}00 \cdot 0{,}99 - 1{,}23 \cdot 1{,}61)\,T_2 + (0{,}49 \cdot 0{,}99 - 0{,}50 \cdot 1{,}61)\,Z_1 = 0,$$
$$(1{,}23 \cdot 1{,}61 - 1{,}00 \cdot 0{,}99)\,T_1 + (0{,}49 \cdot 1{,}23 - 0{,}50 \cdot 1{,}00)\,Z_1 = 0.$$

Es ergibt sich demgemäß:

$$T_1 = \frac{-\,0{,}10}{0{,}99}\,Z_1 = -\,0{,}10\;\;Z_1,$$
$$T_2 = \frac{-\,0{,}32}{0{,}99}\,Z_1 = -\,0{,}323\,Z_1.$$

Diese Werte sind zur Bildung der Ausdrücke für $S_1 \cdots S_{12}$ zu benützen. Nach früherem (Gl. 39) ist unter der Berücksichtigung, daß die Werte X_i und Y_i gleich Null sind:

$$S_1 = 0{,}51\,Z_1 + 1{,}62\,T_1 + 1{,}62\,T_2,$$
$$S_2 = -\,0{,}82\,Z_1 - 1{,}61\,T_1 - T_2,$$
$$S_3 = -\,0{,}82\,Z_1 - T_1 - 1{,}61\,T_2;$$

also findet sich mit den Größen für T_1 und T_2:

$$S_1 = (+\,0{,}51 - 1{,}62 \cdot 0{,}10 - 1{,}62 \cdot 0{,}323)\,Z_1 = -\,0{,}18\,Z_1,$$
$$S_2 = (-\,0{,}82 + 1{,}61 \cdot 0{,}10 + 0{,}323)\,Z_1 \qquad = -\,0{,}34\,Z_1,$$
$$S_3 = (-\,0{,}82 + 0{,}10 + 1{,}61 \cdot 0{,}323)\,Z_1 \qquad = -\,0{,}20\,Z_1.$$

Zur Probe diene, daß die Summe der Vertikalkräfte verschwinden muß:

$$(S_1 + S_2 + S_3 + T_1 + T_2) \cdot \sin\gamma + Z_1 \overset{?}{=} 0,$$

$$-(0{,}18 + 0{,}34 + 0{,}20 + 0{,}10 + 0{,}323)\,Z_1 \cdot \frac{8}{9{,}06} + Z_1 \overset{?}{=} 0,$$

$$-1{,}006\,Z_1 + Z_1 = 0;$$

also stimmt die Probe.

Weiter ist auf Grund des Knotenpunkts II (Gl. 49):

$$S_4 = -\frac{18{,}47}{28{,}58}\,T_1 - \frac{18{,}47}{28{,}58}\,T_2 - \frac{5{,}81}{28{,}58}\,Z_1 = -0{,}65\,T_1 - 0{,}65\,T_2 - 0{,}20\,Z_1,$$

$$S_5 = 1{,}40\,T_1 + 1{,}40\,T_2 + 0{,}44\,Z_1 - Z_2,$$

$$S_6 = -0{,}65\,T_1 - 0{,}65\,T_2 - 0{,}20\,Z_1.$$

Bei Einsetzung der Werte für T_1 und T_2 erhält man:

$$S_4 = +0{,}06\,Z_1 + 0{,}21\,Z_1 - 0{,}20\,Z_1 = +0{,}075\,Z_1,$$

$$S_5 = -0{,}14\,Z_1 - 0{,}45\,Z_1 + 0{,}44\,Z_1 - Z_2 = -0{,}15\,Z_1 - Z_2,$$

$$S_6 = \qquad = +0{,}075\,Z_1.$$

Probe: Summe der Vertikalkräfte am Knotenpunkt II muß verschwinden:

$$-S_1 \cdot \frac{8}{9{,}06} + S_5 + Z_2 = 0,$$

hierbei ist S_1 negativ einzuführen, da seine Zugspannung nach aufwärts gerichtet ist:

$$+0{,}18 \cdot 0{,}88\,Z_1 - 0{,}15\,Z_1 - Z_2 + Z_2 \overset{?}{=} 0,$$

$$0{,}158\,Z_1 - 0{,}15\,Z_1 \overset{?}{=} 0.$$

Knotenpunkt III liefert die Werte für S_7, S_8, S_9. Benützt man wiederum die früheren Gleichungen (41) und setzt dann für T_1, T_2 seine Werte ein, so findet man:

$$S_7 = -0{,}40\,T_2 = +0{,}40 \cdot 0{,}323\,Z_1 = 0{,}13\,Z_1,$$

$$S_8 = -0{,}40\,T_2 = +0{,}40 \cdot 0{,}323\,Z_1 = 0{,}13\,Z_1,$$

$$S_9 = +0{,}882\,T_2 - 1{,}00\,Z_3 = -0{,}882 \cdot 0{,}323\,Z_1 - Z_3 = -0{,}28\,Z_1 - Z_3.$$

Probe:

$$-T_2 \cdot \frac{8}{9{,}06} + Z_3 + S_9 \overset{?}{=} 0,$$

$$+0{,}88 \cdot 0{,}323\,Z_1 + Z_3 - 0{,}28\,Z_1 - Z_3 \overset{?}{=} 0;$$

die linke Seite liefert tatsächlich den Wert Null.

In entsprechender Weise hat man zur Bestimmung der Spannungen S_{10}, S_{11}, S_{12} zu verfahren:

$$S_{10} = 1{,}29\,T_1 + 1{,}05\,T_2 + 0{,}52\,Z_1$$
$$= (-1{,}29 \cdot 0{,}10 - 1{,}05 \cdot 0{,}32 + 0{,}52)\,Z_1 = +0{,}05\,Z_1,$$
$$S_{11} = 1{,}60\,T_1 + 1{,}22\,T_2 + 0{,}69\,Z_1$$
$$= (-1{,}60 \cdot 0{,}10 - 1{,}22 \cdot 0{,}32 + 0{,}69)\,Z_1 = +0{,}14\,Z_1,$$
$$S_{12} = -\,2{,}66\,T_1 - 1{,}82\,T_2 - 1{,}24\,Z_1 - Z_4$$
$$= (+2{,}66 \cdot 0{,}10 + 1{,}82 \cdot 0{,}32 - 1{,}24)\,Z_1 - Z_4 = -0{,}39\,Z_1 - 1{,}0\,Z_4.$$

Probe:

$$-\,S_2 \cdot 0{,}88 + S_{12} + S_{11} \cdot \frac{6{,}0}{\sqrt{61{,}0}} + Z_4 \overset{?}{=} 0,$$

$$(+\,0{,}34 \cdot 0{,}88 - 0{,}39 + 0{,}77 \cdot 0{,}14)\,Z_1 - Z_4 + Z_4 \overset{?}{=} 0.$$

Die Ausrechnung ergibt die Richtigkeit der Gleichung.

Es fehlen schließlich noch die Spannungen S_{13}, S_{14} und S_{15}, S_{16}. Zur Ermittlung der beiden ersten Spannungen ist Knotenpunkt V in Betracht zu ziehen und die zur Bestimmung von ${}_1S_e$ bereits aufgestellte Determinante Δ_5 zu verwenden; sie besaß den Wert:

$$\Delta_5 = -\,142{,}8$$

und liefert sofort:

$$\frac{S_{13}}{6{,}0} = \frac{\Xi_5 \cdot (4{,}76 \cdot 6{,}0 - 0) - H_5 \cdot (6 \cdot 1{,}55 + 5 \cdot 6{,}0) + Z_5 \cdot (0 + 5 \cdot 4{,}76)}{-\,142{,}8},$$

$$\frac{S_{14}}{7{,}81} = \frac{-\,\Xi_5 \cdot (4{,}76 \cdot 6{,}0 - 0) + H_5 \cdot (6 \cdot 1{,}55 - 0) - Z_5 \cdot 0}{-\,142{,}8}.$$

Bei Einsetzung der früher angegebenen Werte für Ξ_5, H_5, Z_5 und Ausrechnung erhält man:

$$S_{13} = -\,0{,}19\,Z_1 + 0{,}06\,Z_1 + 0{,}15\,Z_1 - Z_5 = +\,0{,}02\,Z_1 - Z_5,$$
$$S_{14} = \qquad\qquad +\,0{,}06\,Z_1 - 0{,}21\,Z_1 \qquad = -\,0{,}15\,Z_1.$$

Probe: $S_{14} \cdot 0{,}77 + S_{13} + Z_5 - T_1 \cdot 0{,}88 \overset{?}{=} 0,$

$$-\,0{,}15 \cdot 0{,}77\,Z_1 + 0{,}02\,Z_1 - Z_5 + Z_5 + 0{,}88 \cdot 0{,}10\,Z_1 \overset{?}{=} 0.$$

Die Ausrechnung bestätigt die Richtigkeit der Gleichung.

Für Knotenpunkt VI ist die maßgebende Determinante bei Ermittlung von ${}_2S_e$ bereits aufgestellt worden und ergab:

$$\Delta_6 = 143{,}04.$$

Die Werte S_{16}, S_{15} sind nach derselben:

$$\frac{S_{16}}{6{,}0}=\frac{\Xi_6\cdot(2{,}94\cdot 6{,}0+6\cdot 4{,}76)-H_6\cdot(4{,}05\cdot 6{,}0-6\cdot 1{,}55)+Z_6\cdot(-4{,}05\cdot 4{,}76-1{,}55\cdot 2{,}94)}{+143{,}04},$$

$$\frac{S_{15}}{7{,}81}=\frac{-\Xi_6\cdot(2{,}94\cdot 6{,}0-0)+H_6\cdot(4{,}05\cdot 6{,}0-0)-Z_6\cdot 0}{+143{,}04}.$$

Mit Berücksichtigung der früher gefundenen Werte für Ξ_6, H_6, Z_6 findet sich:

$$S_{16}=0{,}02\,Z_1+0{,}03\,Z_1-0{,}18\,Z_1-1{,}00\,Z_6=-0{,}13\,Z_1-1{,}00\,Z_6,$$
$$S_{15}=-0{,}01\,Z_1-0{,}07\,Z_1=-0{,}08\,Z_1.$$

Probe:

$$S_{15}\cdot 0{,}77+S_{16}+Z_6-0{,}88\,S_3\overset{?}{=}0,$$
$$-0{,}08\cdot 0{,}77\,Z_1-0{,}13\,Z_1-1{,}00\,Z_6+Z_6+0{,}88\cdot 0{,}20\,Z_1\overset{?}{=}0,$$
$$(-0{,}06-0{,}13+0{,}18)\,Z_1\overset{?}{=}0;$$

also zeigt die Ausrechnung wiederum, daß die Gleichung bis auf die gewöhnliche Rechenungenauigkeit stimmt.

Außer den vorgenommenen Proben, die alle auf einer Gleichung beruhen, die bereits bei den einzelnen Knotenpunkten als Gleichgewichtsbedingung verwendet wurde, kann man noch weitere Proben dadurch gewinnen, daß man nachsieht, ob jeder durch einen Flächenschnitt losgelöste Fachwerksteil ein Gleichgewichtssystem für die angreifenden Kräfte darstellt. Legt man z. B. einen Schnitt zwischen dem Ring II, III, $\cdots$ VI und $\overline{\text{II}}$, $\overline{\text{III}}$, $\cdots\overline{\text{VI}}$, so müssen $Z_1\cdots Z_6$ und S_{14}, S_{15}, S_{11}, S_5, S_9, S_{12}, S_{13}, S_{16} zusammen im Gleichgewicht stehen, also muß die Summe aller Vertikalkomponenten verschwinden:

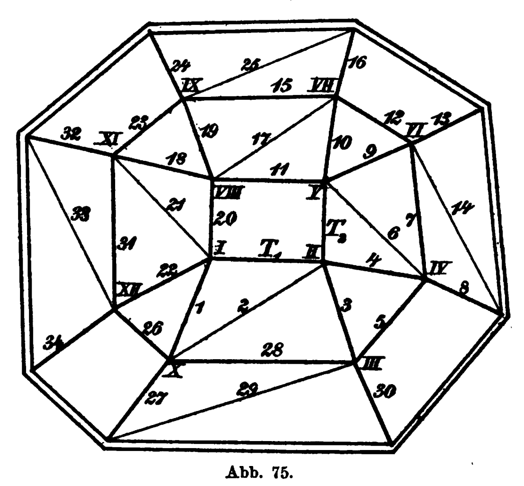
$$S_5+S_9+S_{12}+S_{13}+S_{16}+\{S_{11}+S_{14}+S_{15}\}\cdot 0{,}77$$
$$+Z_1+Z_2+Z_3+Z_4+Z_5+Z_6=0.$$
$$(-0{,}15\,Z_1-Z_2)+(-0{,}28\,Z_1-Z_3)+(-0{,}39\,Z_1-Z_4)$$
$$+(+0{,}02\,Z_1-Z_5)+(-0{,}13\,Z_1-Z_6)$$
$$+\{+0{,}14\,Z_1-0{,}15\,Z_1-0{,}08\,Z_1\}\cdot 0{,}77$$
$$+Z_1+Z_2+Z_3+Z_4+Z_5+Z_6\overset{?}{=}0.$$

Die Ausrechnung bestätigt die Richtigkeit der Gleichung:

$$-(0{,}15+0{,}28+0{,}39-0{,}02+0{,}13+0{,}07)\,Z_1+Z_1\overset{?}{=}0.$$

§ 16. Wichtiges Beispiel bei zwei bezw. vier störenden Stäben. — Stabilitätsuntersuchungen.

50. Als weiteres Beispiel möge das in Abb. 75 im Grundriß dargestellte System betrachtet werden, das wiederum aus zwei Teilen besteht, von denen der untere (einfach durch doppelte Linien angedeutet) für sich starr ist, während die Knotenpunkte des oberen Teiles an diesen angeschlossen sind. Die verschiedenen stärker begrenzten Trapeze sind ebene Felder, aber zwei übereinander liegende[1]) befinden sich in verschiedenen Ebenen. Wie kann man die Stabspannungen des oberen Teiles bestimmen?


Abb. 75.

Da die einzelnen Punkte nicht durch je drei Stäbe angeschlossen sind, müssen störende Stäbe entfernt werden. Man beginnt zu diesem Zwecke etwa an Knotenpunkt I, faßt $\overline{II, I}$ als störenden Stab auf, dessen Spannung zunächst als Unbekannte T_1 einzuführen ist. Wohl laufen an Punkt I vier Stäbe zusammen, da aber drei von ihnen in einer Ebene liegen, kann diejenige des vierten Stabes 1 ausgedrückt werden, indem man z. B. das Moment aller Kräfte für eine Momentenachse in der Ebene der drei anderen Stäbe aufstellt. Am Knotenpunkt II sind wieder vier Unbekannte vorhanden, man nimmt hier abermals einen störenden Stab mit der Spannung T_2 an. Dann

[1]) Der doppelt gezogene Ring und die Ringe III, IV, VI ··· X bezw. I, II, V, VIII liegen in verschiedener Höhe.

liefert II die Spannung in 2, 3, 4; weiter Punkt III diejenige in 5, da die unbekannten Kräfte 28, 29, 30 in einer Ebene liegen. Die Knotenpunkte IV ⋯ VIII ergeben dann die Spannungen der Stäbe 6 ⋯ 20. Weiter kann man zu Knotenpunkt I zurückgehen. Da man diesen bereits benutzt hatte, um die Spannung in 1 zu finden, liegt die Resultante der Kräfte T_1, S_1, P_1 in einer Ebene mit 20, 21, 22, so daß die beiden letzten ausgedrückt werden können, da ja S_{20} bereits von VIII her bekannt ist. Es sind nun noch vier Knotenpunkte unberücksichtigt: IX, X, XI, XII. Die beiden ersteren kann man benutzen, um die Spannungen 23 ⋯ 28 darzustellen, worauf dann der bereits zur Ermittlung von 5 benutzte Knotenpunkt III die Spannung in 29 und 30 liefert.

Es bleibt das labile Endsystem (31, 32, 33, 34) übrig. Um es starr zu machen, müßten von XI und XII aus die Ersatzstäbe nach dem unteren festen Teil laufen. Statt mittels dieser die Bedingungsgleichungen aufzustellen, kann man direkt das Endsystem verwenden und sagen: Bei richtiger Spannung in den Tauschstäben T_1 und T_2 müßten P_{XII}, S_{22}, S_{26} eine Resultante in der Ebene (31, 32, 33) liefern, ebenso die Spannungen P_{XI}, S_{18}, S_{21}, S_{23}. Bezeichnet man die Winkel der Kräfte P_{XI}, S_{22} ⋯ und der Richtung senkrecht zur Ebene (32, 34) mit α_{XI}, α_{22}, α_{26} ⋯, so erhält man die Gleichungen:

$$S_{22} \cdot \cos \alpha_{22} + S_{26} \cdot \cos \alpha_{26} + P_{XII} \cdot \cos \alpha_{XII} = 0,$$
$$S_{21} \cdot \cos \alpha_{21} + S_{18} \cdot \cos \alpha_{18} + S_{23} \cdot \cos \alpha_{23} + P_{XI} \cdot \cos \alpha_{XI} = 0.$$

Da nun jede Spannung außer von den äußeren Kräften noch von T_1 und T_2 abhängig ist, hat man damit zwei Gleichungen zur Bestimmung von T_1 und T_2 gewonnen.

Man kommt demnach bei vorliegendem Beispiel mit Einführung zweier störenden Stäbe sicher zum Ziele. Ist das Fachwerk im oberen Teil vollständig symmetrisch ausgeführt (Abb. 76), so liegt der Gedanke nahe, statt der zwei eben benützten, vier symmetrisch gelegene Stäbe zu entfernen, weil dann auch die vier Bedingungsgleichungen zur Bestimmung von T_1 ⋯ T_4 ganz entsprechend gebaut sind, so daß man aus der ersten sofort

die drei anderen ablesen kann. Dieser Grundsatz, statt der geringsten Zahl der Stabvertauschungen eine größere einzuführen, um dadurch die Aufstellung der Bedingungsgleichungen zu erleichtern, empfiehlt sich vielfach bei symmetrisch gebauten Systemen.[1]) Wohl hat man dann zur Bestimmung der T_i eine größere Zahl von Gleichungen nötig, aber die scheinbare Mehrarbeit infolge der größeren Anzahl von Gleichungen wird mit Vorteil aufgehoben durch die geringere Arbeit zur Aufstellung der verschiedenen Ausdrücke. Es möge dies gerade an vorliegendem Beispiel durchgeführt und zwar gezeigt werden, daß das System stabil ist.

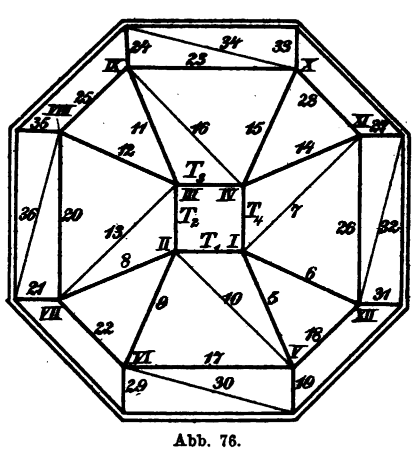


Abb. 76.

51. Ein Fachwerk mit $(3n-6)$ Stäben ist sicher stabil, wenn bei irgend einer Belastung in sämtlichen Stäben eindeutige und endliche Spannungswerte auftreten. Ist also einmal ein System durchgerechnet und haben sich solche Spannungen ergeben, so kann vom Stabilitätsnachweis abgesehen werden. Bei dem Entwurf neuer Systeme wird man aber gern die Frage nach der Stabilität beantwortet wissen wollen, ohne daß man die Spannungsermittlung selbst ausführt. Ist nun das System nach dem ersten oder zweiten Bildungsgesetz hergestellt, so ist das System sicher stabil. Bei anderen Fachwerken kann man zum Stabilitätsnachweis entweder die Stabvertauschung benützen und dabei die Determinante der Gleichungen (35) untersuchen, oder den Satz verwenden, daß in einem System von $(3n-6)$ Stäben beim Fehlen von äußeren Kräften in sämtlichen Stäben die Spannung Null eindeutig auftreten muß.

---

[1]) Vgl. Müller-Breslau, Zentralbl. d. Bauv. 1902, S. 49.

Ob die richtige Anzahl von Stäben vorliegt, wird man auch im letzteren Fall vielfach am raschesten dadurch finden, daß man versucht, das gegebene System durch Stabvertauschung in ein solches überzuführen, das nach dem ersten Bildungsgesetz aufgebaut ist. Liegt die rechte Stabzahl vor, so kommt man bei der Stabilitätsuntersuchung stets dadurch zum Ziele, daß man beim Fehlen von äußeren Kräften in den störenden Stäben zunächst eine beliebige Kraft annimmt, dann der Reihe nach an Knotenpunkten mit drei Stäben die Spannungen bestimmt, bis man schließlich zu Knotenpunkten mit weniger als drei Unbekannten gelangt, und diese zur Aufstellung von Bedingungsgleichungen verwendet. Liefern diese für die störenden Stäbe die Spannung Null, so ergeben sich dadurch auch alle anderen Stäbe als spannungslos, wie aus der Reduktion hervorgeht.

52. Zunächst möge an dem Beispiel der Abb. 76 die Methode der Stabvertauschung Verwendung finden. Die Stäbe T_1 bis T_4 werden entfernt; weiter kann gestrichen werden Knotenpunkt I, II, III, IV, von denen je drei Stäbe ausgehen, dann ebenso V, VII, IX, XI, so daß vom oberen System noch übrig bleiben: VI, VIII, X, XII. An diesen Punkten laufen aber nur je zwei Stäbe zusammen, während es deren drei sein müßten, wenn diese Punkte und damit die vorher gestrichenen eine unverschiebliche Lage haben sollen. Es müssen demgemäß von diesen Punkten die Ersatzstäbe auslaufen. Da es deren vier sind, ihre Zahl also gleich derjenigen der störenden Stäbe ist, besitzt das System sicher die richtige Stabzahl.

Die Ersatzstäbe mögen in horizontaler Lage eingeführt werden.[1]) Ihre Spannungen infolge der willkürlichen Kräfte K_1, $K_2 \cdots$ in Richtung der störenden Stäbe seien bezeichnet mit ${}_1S_e'$, ${}_2S_e'$, ${}_3S_e'$, ${}_4S_e'$, bezw. ${}_1S_e''$, ${}_2S_e''$, ${}_3S_e''$, ${}_4S_e'' \cdots$.[2]) Nach

[1]) Da es sich nur um Bestimmung der Spannungen im oberen Teil handelt, kann man den unteren so weit nach oben ausgebildet denken, daß die Ersatzstäbe horizontal laufen.

[2]) Am einfachsten wählt man natürlich K_1, $K_2 \cdots$ gleich 1; hier wurde ein allgemeiner Wert eingeführt, um die folgenden Formeln übersichtlicher schreiben zu können.

früheren Ausführungen ist das Fachwerk stabil, wenn die Stabvertauschungsdeterminante von Null verschieden ist, also

$$D \equiv \begin{vmatrix} {}_1S_e' & {}_1S_e'' & {}_1S_e''' & {}_1S_e^{\mathrm{IV}} \\ {}_2S_e' & {}_2S_e'' & {}_2S_e''' & {}_2S_e^{\mathrm{IV}} \\ {}_3S_e' & {}_3S_e'' & {}_3S_e''' & {}_3S_e^{\mathrm{IV}} \\ {}_4S_e' & {}_4S_e'' & {}_4S_e''' & {}_4S_e^{\mathrm{IV}} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Die Werte ${}_1S_e'$, ${}_2S_e'$, ${}_3S_e'$, ${}_4S_e'$ sollen nun berechnet werden; aus ihnen ergeben sich dann ${}_iS_e''$, ${}_iS_e''' \cdots$ durch zyklische Vertauschung.

Um diese Berechnung möglichst einfach zu gestalten, möge das spezielle System nach Abb. 77 zu Grunde gelegt werden, bei dem die Stäbe unterhalb des Rings V ⋯ XII in senkrechten Ebenen liegen.[1]) Daß die verschiedenen Diagonalen in den Trapezfeldern jetzt von links unten nach rechts oben laufen, wird für die Stabilität gegen die vorherige Anordnung keinen Unterschied machen, da es nur darauf ankommt, das ebene Trapezfeld durch eine Diagonale starr zu gestalten.

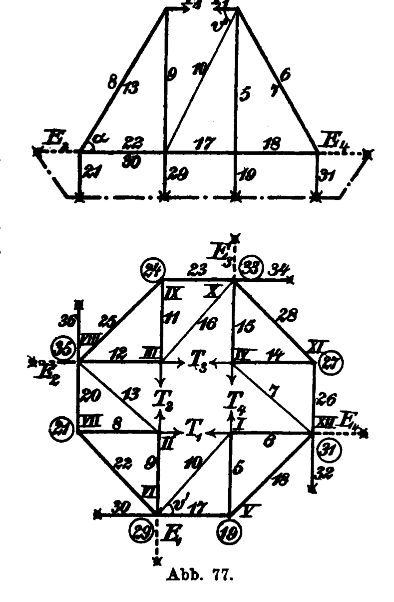


Abb. 77.

Die verschiedenen Spannungen mögen mittels gewöhnlicher Zerlegung gefunden werden, um ein klares Bild der Kräftewirkung zu erhalten.

Zunächst werde das reduzierte System betrachtet für den Fall, daß nur an den Endpunkten des fortgenommenen Stabes $\overline{\mathrm{I, II}}$ die willkürliche Kraft K_1 wirke, und zwar von den Knotenpunkten fortstrebend. In den Stäben 7, 14,

[1]) Die im Grundriß nicht sichtbaren senkrechten Stäbe sind durch Kreise angedeutet.

15, 16, 11, 12, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 33, 34, E_8 herrscht alsdann die Spannung Null. Knotenpunkt II liefert die Spannungen in 8, 9, 13. Zu deren Ermittlung wird die Kraft K_1 in zwei Komponenten zerlegt: eine in die Ebene II, III, VII, VIII in Richtung des Stabes 8 (Q) und eine vertikale N (Abb. 78):

$$Q = \frac{K_1}{\cos\alpha}, \quad N = K_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

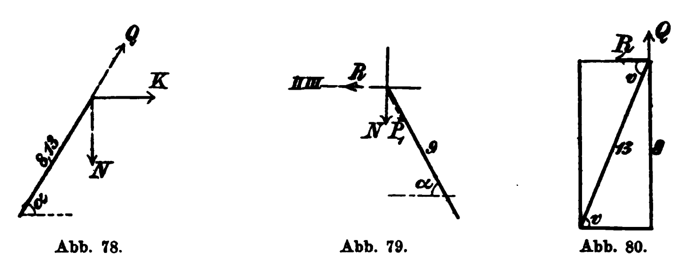


Abb. 78. Abb. 79. Abb. 80.

Die Kraft N wird nun nochmals zerlegt in zwei Komponenten (Abb. 79) in Richtung II, III (R) und II, VI (P):

$$R = N \cdot \cot\alpha = K_1, \quad P = \frac{N}{\sin\alpha} = \frac{K_1}{\cos\alpha}.$$

Die drei Kräfte R, P, Q ersetzen also die einzelne Kraft K_1, die mit S_8, S_{13}, S_9 Gleichgewicht halten soll. Die Kraft Q ruft nur in 8 eine Spannung hervor, da sie in diese Richtung fällt, P nur eine solche in 9 aus demselben Grund, während R eine Spannung in 8 und 13 bewirkt, aber keine in 9, da 8, 13, R in derselben Ebene liegen. Durch R entsteht (Abb. 80):

$$\text{in 8: } R \cdot \operatorname{tg} v, \quad \text{in 13: } -\frac{R}{\cos v}.$$

Die wirklichen Spannungen in 9, 13, 8 infolge K_1 sind demnach gegeben durch:

$$S_9' = -P = \frac{-K_1}{\cos\alpha},$$

$$S_{13}' = \frac{-R}{\cos v} = \frac{-K_1}{\cos v},$$

$$S_8' = +Q + R \cdot \operatorname{tg} v = \frac{K_1}{\cos\alpha} + K_1 \cdot \operatorname{tg} v,$$

wobei die positiven Vorzeichen Zug, die negativen Druck bedeuten.

An Knotenpunkt I wirkt als Last wiederum K_1 und es ergibt sich durch eine ähnliche Betrachtung:

$$S_6' = 0,$$
$$S_5' = K_1 \cdot \operatorname{tg} v,$$
$$S_{10}' = -\frac{K_1}{\cos v}.$$

Um die Spannung im Ersatzstab E_1 infolge K_1 zu finden (${}_1S_e'$), hat man die Spannung S_{22}' nötig. Diese wird an Knotenpunkt VII ermittelt, indem man die Summe aller Kraftkomponenten in der wagrechten Richtung, senkrecht zur Ebene (20, 21), gleich Null setzt. Man zerlegt zu diesem Zweck S_8' in eine wagrechte ($S_8' \cdot \cos\alpha$) und senkrechte Komponente, und denkt sich S_{22}' in zwei Komponenten gespalten, von denen die eine in der Richtung $\overline{\text{VII}, \text{VIII}}$, die andere senkrecht dazu ($S_{22}' \cdot \cos 45^0$) verläuft. Die Komponentengleichung ergibt demnach:

$$S_{22}' \cdot \cos 45^0 + S_8' \cdot \cos\alpha = 0$$

oder:

$$S_{22}' = -S_8' \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos 45^0} = \frac{-K_1}{\cos 45^0}(1 + \operatorname{tg} v \cdot \cos\alpha),$$

also eine Druckspannung.

Zur Ermittlung von ${}_1S_e'$ stellt man dann an Knotenpunkt VI die Summe aller Kraftkomponenten in Richtung von E_1 auf und bedenkt, daß diese Summe verschwinden muß. In der Gleichung werden auftreten S_{22}', S_9', S_{10}' und ${}_1S_e'$. Man zerlege S_{10}' in zwei Komponenten: eine in Richtung VI, V und eine in Richtung VI, II. Nur letztere ist von Bedeutung:

$$S_{10}' \cdot \sin v = \frac{-K_1}{\cos v} \cdot \sin v = -K_1 \cdot \operatorname{tg} v.$$

Man füge sie mit S_9', mit der sie ja zusammenfällt, zu einer einzigen Kraft zusammen und spalte diese in eine wagrechte und senkrechte Komponente, von denen nur erstere einen Beitrag zur Komponentengleichung liefert; diese ist gegeben durch:

$$(S_9' + S_{10}' \cdot \sin v) \cdot \cos\alpha = \left(\frac{-K_1}{\cos\alpha} - K_1 \cdot \operatorname{tg} v\right) \cdot \cos\alpha$$
$$= -K_1(1 + \operatorname{tg} v \cdot \cos\alpha).$$

Von S_{22}' tritt schließlich als Komponente in der Richtung E_1 auf:

$$S_{22}' \cdot \cos 45^0 = - K_1 \cdot (1 + \operatorname{tg} v \cdot \cos \alpha).$$

Man erhält demgemäß die Gleichung:

$$S_{22}' \cdot \cos 45^0 + (S_9' + S_{10}' \cdot \sin v) \cdot \cos \alpha = {}_1S_e',$$

oder:

$${}_1S_e' = - 2 K_1 \cdot (1 + \operatorname{tg} v \cdot \cos \alpha).$$

Die Spannung im Ersatzstab E_2 infolge K_1, also ${}_2S_e'$, wird man an Knotenpunkt VIII erhalten aus der Bedingung, daß die Summe aller Kraftkomponenten in Richtung von E_2 verschwinden muß:

$${}_2S_e' = S_{13}' \cdot \sin v \cdot \cos \alpha = - K_1 \cdot \operatorname{tg} v \cdot \cos \alpha.$$

Entsprechend findet man ${}_4S_e'$ am Knotenpunkt XII mittels der Gleichung:

$${}_4S_e' = S_6' \cdot \cos \alpha + S_{18}' \cdot \cos 45^0;$$

da nun Punkt V für S_{18}' den Wert ergibt:

$$S_{18}' = - S_5' \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos 45^0} = - K_1 \cdot \frac{\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} v}{\cos 45^0},$$

so bekommt man:

$${}_4S_e' = 0 - K_1 \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} v = - K_1 \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} v.$$

Man hat demgemäß infolge der Kraft K_1 an Punkt I und II in den vier Ersatzstäben folgende Spannungen erhalten:

$$\begin{aligned}
{}_1S_e' &= - 2 \cdot K_1 \cdot (1 + \operatorname{tg} v \cdot \cos \alpha),\\
{}_2S_e' &= - K_1 \cdot \operatorname{tg} v \cdot \cos \alpha,\\
{}_3S_e' &= 0,\\
{}_4S_e' &= - K_1 \cdot \operatorname{tg} v \cdot \cos \alpha.
\end{aligned}$$

Die Spannungen der Ersatzstäbe durch die Kräfte K_2, K_3, K_4 in den fortgenommenen Stäben $\overline{\text{II, III}}$, $\overline{\text{III, IV}}$, $\overline{\text{IV, I}}$ findet man aus den eben gewonnenen sofort durch zyklische Vertauschung, wie man aus der symmetrischen Bauweise des Gebildes Abb. 77 ohne weiteres erkennt:

$$
\begin{aligned}
{}_1S_e'' &= -K_2 \cdot \operatorname{tg} v \cdot \cos\alpha, \\
{}_2S_e'' &= -2K_2 \cdot (1 + \operatorname{tg} v \cdot \cos\alpha), \\
{}_3S_e'' &= -K_2 \cdot \operatorname{tg} v \cdot \cos\alpha, \\
{}_4S_e'' &= 0
\end{aligned}
$$

usw. Es sollen nun die Spannungen der Ersatzstäbe verschwinden, also ist:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 \cdot 2K_1 \cdot (1 + \operatorname{tg} v \cdot \cos\alpha) + \lambda_2 \cdot K_2 \cdot \operatorname{tg} v \cdot \cos\alpha \\
&+ \lambda_3 \cdot 0 + \lambda_4 \cdot K_4 \cdot \operatorname{tg} v \cdot \cos\alpha = 0, \\
&\lambda_1 \cdot K_1 \cdot \operatorname{tg} v \cdot \cos\alpha + \lambda_2 \cdot 2K_2 \cdot (1 + \operatorname{tg} v \cdot \cos\alpha) \\
&+ \lambda_3 \cdot K_3 \cdot \operatorname{tg} v \cdot \cos\alpha + \lambda_4 \cdot 0 = 0, \\
&\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot K_2 \cdot \operatorname{tg} v \cdot \cos\alpha \\
&+ \lambda_3 \cdot 2K_3 \cdot (1 + \operatorname{tg} v \cdot \cos\alpha) + \lambda_4 \cdot K_4 \cdot \operatorname{tg} v \cdot \cos\alpha = 0, \\
&\lambda_1 \cdot K_1 \cdot \operatorname{tg} v \cdot \cos\alpha + \lambda_2 \cdot 0 \\
&+ \lambda_3 \cdot K_3 \cdot \operatorname{tg} v \cdot \cos\alpha + \lambda_4 \cdot 2K_4 \cdot (1 + \operatorname{tg} v \cdot \cos\alpha) = 0
\end{aligned}
$$

und die auf S. 121 angegebene, für die Stabilität maßgebende Determinante[1]) lautet:

$$
D \equiv \begin{vmatrix}
2(1+\operatorname{tg}v\cdot\cos\alpha) & \operatorname{tg}v\cdot\cos\alpha & 0 & \operatorname{tg}v\cdot\cos\alpha \\
\operatorname{tg}v\cdot\cos\alpha & 2(1+\operatorname{tg}v\cdot\cos\alpha) & \operatorname{tg}v\cdot\cos\alpha & 0 \\
0 & \operatorname{tg}v\cdot\cos\alpha & 2(1+\operatorname{tg}v\cdot\cos\alpha) & \operatorname{tg}v\cdot\cos\alpha \\
\operatorname{tg}v\cdot\cos\alpha & 0 & \operatorname{tg}v\cdot\cos\alpha & 2(1+\operatorname{tg}v\cdot\cos\alpha)
\end{vmatrix}.
$$

Beim Ausrechnen erkennt man, daß die Determinante von Null verschieden ist, also ist das System nach Abb. 77 stabil.

53. Um nun nach dem anderen Stabilitätsverfahren zu untersuchen, ob beim Fehlen der äußeren Kräfte in allen Stäben die Spannung Null auftritt, nehme man in den oberen Ringstäben die Spannungen T_1, T_2, T_3, T_4 zunächst an, lasse sie als äußere Kräfte wirken, drücke die Spannung eines jeden Stabes durch diese Werte aus und benütze dann die Punkte VI, VIII, X, XII zur Aufstellung der Bedingungsgleichungen, indem die Summe der Komponenten

[1]) Die Faktoren $K_1 \cdots K_4$ sind für die Frage, ob $D \gtrless 0$, von keiner Bedeutung.

von S_{22}, S_9, S_{10} in Richtung senkrecht zur Ebene (17, 29) verschwinden muß, bezw. diejenige der Komponenten von S_{12}, S_{13}, S_{25} in Richtung senkrecht zu (20, 35) usw. Diese betreffende Richtung fällt aber jedesmal mit derjenigen der oben eingeführten Ersatzstäbe E_1, $E_2 \cdots$ zusammen, so daß man sofort erkennt, daß die Bedingungen: „in den Ersatzstäben darf keine Spannung auftreten", sich mit den jetzt benützten decken. Die betreffenden Bedingungsgleichungen lauten geradeso, wie diejenigen bei der Methode der Stabvertauschung, nur ist jedesmal $\lambda_i K_i$ durch T_i zu ersetzen:

$$\begin{aligned}
&2(1+\operatorname{tg} v\cdot\cos\alpha)\,T_1 + \operatorname{tg} v\cdot\cos\alpha\;T_2 + 0\;T_3 + \operatorname{tg} v\cdot\cos\alpha\;T_4 = 0,\\
&\operatorname{tg} v\cdot\cos\alpha\;T_1 + 2(1+\operatorname{tg} v\cdot\cos\alpha)\,T_2 + \operatorname{tg} v\cdot\cos\alpha\;T_3 + 0\;T_4 = 0,\\
&0\;T_1 + \operatorname{tg} v\cdot\cos\alpha\;T_2 + 2(1+\operatorname{tg} v\cdot\cos\alpha)\,T_3 + \operatorname{tg} v\cdot\cos\alpha\;T_4 = 0,\\
&\operatorname{tg} v\cdot\cos\alpha\;T_1 + 0\;T_2 + \operatorname{tg} v\cdot\cos\alpha\;T_3 + 2(1+\operatorname{tg} v\cdot\cos\alpha)\,T_4 = 0
\end{aligned}$$

und liefern für $T_1 \cdots T_4$ die Spannungen Null, da die maßgebende Determinante von Null verschieden ist. Wenn aber in den vier oberen Ringstäben die Spannung Null herrscht, dann sind alle Stäbe spannungslos, wie die Kräftezerlegung an den einzelnen Punkten zeigt, und damit ist die Stabilität des Systems Abb. 77 erwiesen.[1])

Wenn das regelmäßige Gebilde stabil ist, so ist es jedenfalls auch ein unregelmäßiges von derselben Struktur, und so ist hiermit auch die Stabilität des Gebildes Abb. 75 bewiesen. Bei Stabilitätsuntersuchungen für Raumsysteme kann es sich manchmal empfehlen, auf die regelmäßige Form überzugehen, um Ausnahmefälle gleich zu erkennen.

---

[1]) Bei vielen Systemen kann man das Auftreten der Spannung Null beim Fehlen von äußeren Kräften ohne Benützung von störenden Stäben nachweisen und gerade dann zeigt sich der Vorteil dieses Satzes für den Stabilitätsbeweis.

§ 17. Methoden von Mohr und Müller-Breslau.

54. Das Wesentliche der behandelten allgemeinen Verfahren bestand darin, daß man bestimmte Stäbe als störend betrachtete, daß man ihre unbekannten Spannungen als äußere Kräfte einführte, hierauf die Stabkräfte des übrigen Systems durch dieselben ausdrückte und auf Grund gewisser Bedingungen die Spannungen der störenden Stäbe ermittelte, womit dann alle Stabkräfte gegeben waren.

Am naturgemäßesten erscheint es hierbei, direkt die Knotenpunktsbedingungen zu benützen, weil man auf diese Weise keinen neuen Gedanken einzuführen hat. Allgemein rechnete mit diesen Bedingungen zuerst Mohr,[1]) der darauf ein vollständiges Verfahren aufbaut: Man denkt sich wiederum die störenden Stäbe (Laststäbe) mit ihren unbekannten Spannungen $T_1 \cdots T_m$ fortgenommen, am besten so, daß ein System übrig bleibt, bei dem je ein Knotenpunkt durch drei Stäbe an ein bewegliches Endsystem angeschlossen ist. Auf dies Gebilde läßt man nun die Spannungen $T_1 \cdots T_m$ als Lasten an den Endpunkten der fortgenommenen Stäbe zusammen mit den äußeren Kräften X_i, Y_i, Z_i wirken. Von einem dreifachen Knotenpunkt ausgehend, kann dann jede Spannung (zunächst bis auf diejenigen im beweglichen Endsystem) in der Form (vgl. § 10) dargestellt werden:

$$S_i = F_i(X_1, Y_1, Z_1 \cdots T_1 \cdots T_m), \tag{44}$$

indem man nach Mohr auf jeden dreifachen Knotenpunkt der Reihe nach das Prinzip der virtuellen Verrückungen anwendet, wie dies auf S. 72—75 angegeben wurde. Bei dem Beispiel der Abb. 73—74 würde man demgemäß nach Entfernung der Stäbe T_1 und T_2, ausgehend von Knotenpunkt I mit den Unbekannten S_1, S_2, S_3, diese durch X_i, $Y_i \cdots T_2$ ausdrücken, dann S_4, S_5, S_6 an Punkt II, weiter S_7, S_8, S_9 (III) und S_{10}, S_{11}, S_{12} an IV, und so z. B. erhalten:

---

[1]) Zentralbl. d. Bauv. 1902 u. 1903. — Abh. a. d. techn. Mech., S. 437. — Mehrtens, Statik d. Bauk., Bd. I, § 13.

$$S_6 = F_6 (X_1, Y_1, Z_1 \cdots T_1, T_2),$$
$$S_{10} = F_{10}(X_1, Y_1, Z_1 \cdots T_1, T_2).$$

Das übrige System ist beweglich, indem V und VI nur durch zwei Stäbe an den unteren starren Teil angeschlossen sind; diese beiden Punkte liefern demgemäß die zwei notwendigen Bedingungsgleichungen. Dieselben können statt in der auf S. 102 angegebenen Weise auch folgendermaßen aufgestellt werden: Man nehme an Knotenpunkt V an, die Spannung S_{10} sei noch nicht mittels des Knotenpunkts IV ausgedrückt, so daß also an V drei unbekannte Spannungen S_{10}, S_{13}, S_{14} vorliegen (S_7 ist ja von Punkt III her bekannt!), von denen jede wieder nach Gl. 44 dargestellt werden kann, also z. B.:

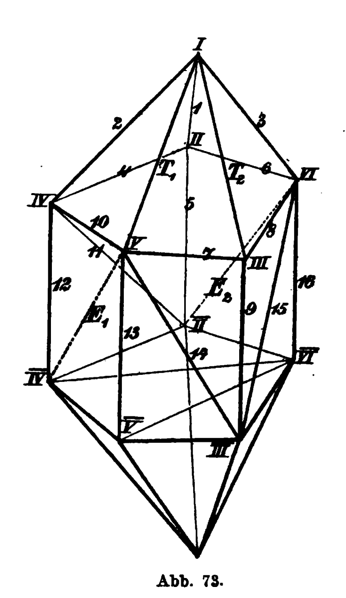


Abb. 73.

$$S_{10} = F'_{10}(X_1, Y_1, Z_1 \cdots T_1, T_2).$$

Ebenso benützt man Knotenpunkt VI, um derartige Ausdrücke für S_6, S_{15}, S_{16} zu erhalten, indem man die vorher für S_8 und S_8 gewonnenen Werte verwendet, und bekommt z. B.:

$$S_6 = F_6'(X_1, Y_1, Z_1 \cdots T_1, T_2).$$

Man hat damit für S_{10} und S_6 je zwei Ausdrücke gewonnen, einen am Knotenpunkt III, den anderen an V, bezw. an II und VI. Indem man jedesmal die beiden Werte einander gleich setzt, bekommt man zwei Gleichungen:

$$F_{10}(X_1, Y_1, Z_1 \cdots T_1, T_2) = F'_{10}(X_1, Y_1, Z_1 \cdots T_1, T_2),$$
$$F_6 (X_1, Y_1, Z_1 \cdots T_1, T_2) = F_6' (X_1, Y_1, Z_1 \cdots T_1, T_2),$$

aus denen die Unbekannten T_1, T_2, also die Spannungen der störenden Stäbe ermittelt werden können. Da nun alle übrigen Spannungen bereits als Funktion der äußeren Kräfte und dieser

beiden Größen dargestellt sind, können $S_1 \cdots S_{16}$ sofort berechnet werden.

55. Eine weitere Möglichkeit, die Spannungen eines zusammengesetzten Fachwerks zu ermitteln, bietet die Kinematik der Fachwerke: man verwandelt das System durch Herausnehmen des Stabes mit der zu berechnenden Spannung in ein bewegliches Gebilde, zwangläufige Kette, führt an den Endpunkten des fortgenommenen Stabes i, k die zunächst unbekannte Spannung S_{ik} als Last ein und wendet auf das gesamte Lastensystem (äußere Kräfte und Spannung des entfernten Stabes) das Prinzip der virtuellen Verrückungen an:

$$S_{ik} \cdot (\delta_i - \delta_k) = \Sigma P_r \cdot \delta_r,$$

wobei die Werte δ_r, bezw. δ_i, δ_k die Projektionen von zusammengehörigen, virtuellen, d. i. bedingungsgemäßen kleinen Verrückungen des r., bezw. i. und k. Punktes auf die Richtung der Kraft P_r, bezw. in Richtung des Stabes i, k bedeuten. Diese Gleichung erlaubt die Lösung der allgemeinen Aufgabe, die Spannung eines beliebigen Fachwerksstabs als lineare Funktion der äußeren Kräfte darzustellen, eine Aufgabe, die in dieser Weise zuerst von Müller-Breslau[1]) ganz durchgeführt wurde, während später Mohr ein kinematisches Verfahren in abweichender Form angab.

Beide Methoden sollen hier ohne vollständige Durchrechnung angegeben werden, da für Berechnung von Raumfachwerken in den meisten Fällen eines der bisher beschriebenen Verfahren zweckmäßiger erscheint, als wie ein kinematisches. Wenn möglich, wird man ja überhaupt statt der allgemeinen Methode eine spezielle anwenden, da diese fast immer rascher zum Ziele führt. Allerdings haben die allgemeinen Methoden, so auch diejenige von Müller-Breslau und Mohr, den Vorteil, daß man ohne besondere Gedankenarbeit eine beliebige Aufgabe lösen kann. Bei den ebenen Fachwerken werden die allgemeinen Methoden verhältnismäßig wenig an-

[1]) Vgl. hierzu die Bemerkung auf S. 43, worin auf die früheren Mohrschen Arbeiten, sowie die von Föppl hingewiesen ist.

gewendet, da hier für die verschiedensten Systeme die speziellen Verfahren vollständig geläufig geworden sind. Bei den Raumsystemen dagegen benutzt man die allgemeinen Methoden gar viel, weil auf spezielle Methoden, abgesehen von Föppl und Landsberg, zu wenig hingewiesen wurde. Es ist dies eine Zurücksetzung der speziellen Methoden, zu deren Hebung dieses Buch auch etwas beitragen soll. Ganz vermeiden lassen sich allerdings die allgemeinen Verfahren nicht für praktische Berechnungen, aber dann kommt man gewöhnlich mit demjenigen der Stabvertauschung bezw. der Knotenpunktsbedingungen in bequemer und übersichtlicher Weise zum Ziele, und dieses Verfahren wird als ein im wesentlichen rein statisches in diesem Werke mit Vorliebe angewendet.

56. Müller-Breslau[1]) stellte sich, wie erwähnt, die Aufgabe, die Spannung in einem beliebigen Stabe als lineare Funktion der äußeren Kräfte P_i bezw. X_i, Y_i, Z_i darzustellen:

$$S_{ik} = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 + P_3 \cdot p_3 + \cdots + P_n \cdot p_n$$

bezw.:

$$S_{ik} = X_1 \cdot \xi_1 + Y_1 \cdot \eta_1 + Z_1 \cdot \zeta_1 + \cdots + X_n \cdot \xi_n + Y_n \cdot \eta_n + Z_n \cdot \zeta_n.$$

Der Zusammenhang der Faktoren p_r, bezw. ξ_r, η_r, ζ_r mit den oben benützten Verschiebungsgrößen δ_r, bezw. den Komponenten δx_r, δy_r, δz_r, ist sofort zu erkennen, indem mit Einführung von:

$$\varDelta s_{ik} = \delta_i - \delta_k$$

das Prinzip der virtuellen Verrückungen liefert:

$$S_{ik} \cdot \varDelta s_{ik} = \Sigma P_r \cdot \delta_r \tag{45}$$

bezw.:

$$S_{ik} \cdot \varDelta s_{ik} = \Sigma (X_r \cdot \delta x_r + Y_r \cdot \delta y_r + Z_r \cdot \delta z_r). \tag{46}$$

Es ist also:

$$p_r = \frac{\delta_r}{\varDelta s_{ik}},$$

$$\xi_r = \frac{\delta x_r}{\varDelta s_{ik}}, \quad \eta_r = \frac{\delta y_r}{\varDelta s_{ik}}, \quad \zeta_r = \frac{\delta z_r}{\varDelta s_{ik}}.$$

---

[1]) Zentralbl. d. Bauv. 1892, S. 225 — 1902, S. 429. — D. n. Meth. d. Fest., 3. Aufl., S. 306.

Die virtuellen Verrückungen müssen mit den Bedingungen des Systems verträglich sein, dürfen aber im übrigen beliebig gewählt werden. Da nun das Stabsystem ohne den Stab i, k vom ersten Grade der Bewegungsfreiheit ist, so sind durch Annahme von einer bedingungsgemäßen Verrückung die übrigen bestimmt. Man kann demgemäß eine Verrückung, z. B. Δs_{ik}, beliebig annehmen; wird diese mit der Größe „1" eingeführt, so sind die Einflußzahlen p_i direkt durch die δ_i gegeben.

Die Aufgabe, die zu lösen ist, besteht hiernach darin, alle Verschiebungen von Lastpunkten zu ermitteln, die infolge der Längenänderung Δs irgend eines Stabes entstehen.

Ist das Raumfachwerk nach dem ersten Bildungsgesetz hergestellt, so kann leicht die Verschiebung aller Knotenpunkte des gebildeten beweglichen Systems durch Annahme einer einzigen bestimmt werden, wenn man die Grundaufgabe zu lösen vermag: die Verschiebungen δx_i, δy_i, δz_i eines Punktes zu ermitteln, der durch drei Stäbe mit Punkten verbunden ist, deren Verschiebungen δx_1, δy_1, $\delta z_1 \cdots \delta z_3$ bekannt sind. Die naheliegendste Lösung dieser Aufgabe beruht auf der Gleichung:

$$l_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2,$$

die man für jeden Stab aufstellen kann, wobei x_i, y_i, z_i, bezw. x_k, y_k, z_k die Koordinaten des i. bezw. k. Punktes bedeuten, l_{ik} die Länge des Stabes i, k ist. Da nun die Stäbe starr sind, erhält man demgemäß für die Knotenpunktsverrückungen die Gleichung:

$$(x_i - x_k) \cdot (\delta x_i - \delta x_k) + (y_i - y_k) \cdot (\delta y_i - \delta y_k) + (z_i - z_k) \cdot (\delta z_i - \delta z_k) = 0. \qquad (47)$$

Da bei der Grundaufgabe die Koordinaten sämtlicher Stabendpunkte 1, 2, 3, i bekannt sind, außerdem δx_1, δy_1, $\delta z_1 \cdots \delta z_3$, so kann man den drei Stäben entsprechend drei Gleichungen aufstellen, die als Unbekannten nur die Verrückungen δx_i, δy_i, δz_i des durch die drei Stäbe angeschlossenen Punktes enthalten.

Bequemer als die durch diese drei Gleichungen gegebene Lösung ist gewöhnlich die, welche sich ergibt, wenn man[1])

[1]) Müller-Breslau, D. n. Meth. d. Fest., S. 305.

auf das System der drei Stäbe das Prinzip der virtuellen Verrückungen für eine beliebige günstig gewählte Belastung am Knotenpunkt i anwendet. Wird die Verschiebung δ_i des i. Punktes in einer bestimmten Richtung l, l gesucht, so belaste man diesen Punkt mit einer Kraft von der Größe 1 in der Richtung l, l und bestimme die ihr an den Punkten 1, 2, 3 Gleichgewicht haltenden Kräfte S_1, S_2, S_3, in den drei Stabrichtungen. Bezeichnen dann δ_1, δ_2, δ_3 die Projektionen der bekannten Verschiebungen auf die Richtung der Stäbe 1, 2, 3, so liefert das Prinzip der virtuellen Verrückungen:

$$1 \cdot \delta_i + S_1 \cdot \delta_1 + S_2 \cdot \delta_2 + S_3 \cdot \delta_3 = S_1 \cdot \Delta s_1 + S_2 \cdot \Delta s_2 + S_3 \cdot \Delta s_3,$$

also eine Gleichung, die als einzige Unbekannte die gesuchte Verschiebung δ_i enthält. Will man die Verschiebungen δx_i, δy_i, δz_i erhalten, so wird man als Richtungslinie der Kraft 1 nacheinander die x-, y-, z-Richtung einführen. Man gewinnt demgemäß in dieser Weise statt dreier Gleichungen mit drei Unbekannten drei Gleichungen mit je einer Unbekannten. Die erste Lösung hat den Vorteil, daß sie gar keine Gedankenarbeit erfordert, und liefert auch bei Anwendung von Determinanten übersichtliche Rechnungen.

Man erkennt, daß die Bestimmung der Verrückungen eines durch drei Stäbe angeschlossenen Punktes prinzipiell umständlicher ist,[1]) als die Ermittlung der Spannungen in den drei Stäben infolge einer angreifenden Kraft, wird darum auch für ein Fachwerk nach dem ersten Bildungsgesetz die Spannungen der Stäbe kaum nach der kinematischen Methode ermitteln.

57. Es ist nun die Frage, wie sich bei den zusammengesetzten Raumfachwerken die Müller-Breslausche Methode gestaltet. Zu ihrer Beschreibung soll ein System ins Auge gefaßt werden, das einen unteren, für sich starren Teil[2]) enthält, z. B. Abb. 76.

[1]) Man kann auch diese Aufgabe in übersichtlicher Weise graphisch lösen, indem man die Verschiebungspläne der Ebene in den Raum überträgt und die eine Bildebene, Aufrißebene, zweckmäßig wählt. Müller-Breslau, Zentralbl. d. Bauverw. 1892, S. 225; vgl. auch ebenda 1902, S. 429.

[2]) Derartige Gebilde sind wichtig für praktische Fälle, da alle gestützten Systeme sich in dieser Weise darstellen.

Man denke sich die verschiedenen störenden Stäbe (m) fortgenommen (im Beispiel Abb. 76 die vier oberen Ringstäbe), so daß ein Gebilde übrig bleibt, bei dem an ein m-fach bewegliches Endsystem alle weiteren Punkte durch je drei Stäbe angeschlossen sind. In diesem Stabsystem können nun zur Erhaltung von zusammengehörigen virtuellen Verrückungen die Verschiebungen von m Punkten, den übrigen Bedingungen des Stabsystems entsprechend, beliebig angenommen werden, nämlich die Verschiebungen derjenigen m Knotenpunkte, an denen nach der auf S. 94 angegebenen Regel für die reine Stabvertauschung die Ersatzstäbe einzuziehen wären (VI, VIII, X, XII in Beispiel Abb. 76). Nach Einführung dieser Verrückungen $\varDelta e_1 \cdots \varDelta e_m$ lassen sich dann die Verschiebungen δ_r der übrigen Systemknotenpunkte (V, VII, IX, XI, I, II, III, IV) mit Hilfe obiger Grundaufgabe und damit auch die Entfernungsänderungen $\varDelta t_1 \cdots \varDelta t_m$ derjenigen Knotenpunkte (I, II, III, IV) berechnen, d. h. durch $\varDelta e_1 \cdots$ ausdrücken, zwischen denen die störenden Tauschstäbe $T_1 \cdots T_m$ lagen. Es sind also die Werte $\varDelta t_1 \cdots \varDelta t_m$ durch die angenommenen, aber bedingungsgemäßen Verschiebungen $\varDelta e_1 \cdots \varDelta e_m$ festgelegt. Mit Hilfe dieser Gleichungen drückt man nun umgekehrt die Verschiebungen $\varDelta e_1 \cdots \varDelta e_m$ als Funktionen von den Längenänderungen $\varDelta t_1 \cdots \varDelta t_m$ der Tauschstäbe aus:

$$\varDelta e_r = f_r(\varDelta t_1 \cdots \varDelta t_m),$$

und alsdann die verschiedenen Werte δ_r, die ja durch die $\varDelta e_r$ auch gegeben waren.

Nachdem so allgemeine Gleichungen zur Bestimmung von $\varDelta e_r$ und δ_r gefunden sind bei gegebenen Längenänderungen $\varDelta t$, setzt man alle $\varDelta t$ mit Ausnahme eines Wertes $\varDelta t_i$ gleich Null, denkt sich also nur einen Stab T_i entfernt, erhält eine zwangläufige Kette, ein System von einfacher Bewegungsfreiheit, für das die Gleichung gilt:

$$T_i \cdot \varDelta t_i = P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 + \cdots + P_n \cdot \delta_n.$$

Bei dieser Schreibweise sind die Verschiebungen $\varDelta e_r$ in den δ_r enthalten, und alle diese Verrückungen sind durch $\varDelta t_i$

ausgedrückt. Für Δt_i nimmt man am einfachsten den Wert 1 an, so daß direkt T_i gegeben ist durch:

$$T_i = P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 + \cdots + P_n \cdot \delta_n.$$

Um die Aufgabe für eine ganz allgemeine Belastung zu lösen, wird man die Komponenten X_r, Y_r, Z_r der Kräfte P_r einführen, und entsprechend die Verschiebungskomponenten δx_r, δy_r, δz_r, so daß man dann erhält:

$$T_i = X_1 \cdot \delta x_1 + Y_1 \cdot \delta y_1 + Z_1 \cdot \delta z_1 + \cdots + Z_n \cdot \delta z_n.$$

Man kann in dieser Weise die Spannungen der störenden Stäbe berechnen und dann diejenige der übrigen Stäbe mittels einfacher Kräftezerleguug. Man kann aber auch der Reihe nach überhaupt für jeden Stab in entsprechender Weise vorgehen und so auf Grund obiger Gleichung sofort jede Spannung darstellen als lineare Funktion der verschiedenen Belastungsfälle. Ist dies geschehen, so findet man leicht, welche Belastung die Spannung eines bestimmten Stabes zu der größtmöglichen macht.

Man erkennt den Zusammenhang dieses Verfahrens mit demjenigen der Stabvertauschung bezw. der Knotenpunktsbedingungen: an die Stelle der dort angegebenen m rein statischen Bedingungsgleichungen treten hier diejenigen, die die an Stelle der Ersatzstäbe eingeführten bedingungsgemäßen Verschiebungen $\Delta e_1 \cdots$ abhängig machen von den Änderungen $\Delta t_1 \cdots \Delta t_m$, und diese Verschiebungen $\Delta e_1 \cdots$ fallen gerade in diejenige Richtung, in der nach S. 102 die Summe der durch T_i ausgedrückten Kräfte verschwinden muß. Denkt man sich nämlich z. B. in Abb. 76 die vier oberen Ringstäbe als störend entfernt, dann alle Knotenpunkte mit je drei Stäben nacheinander gestrichen,

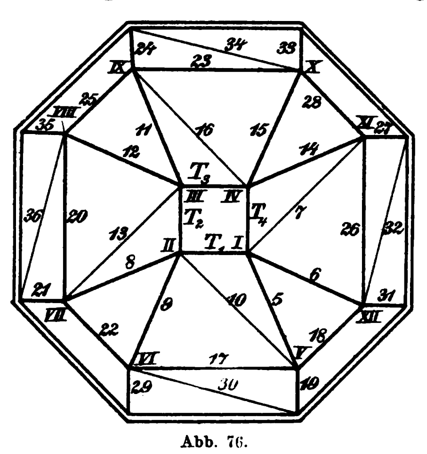


Abb. 76.

so bleibt schließlich noch das labile System, bestehend aus den Punkten VI, VIII, X, XII mit je zwei Stäben übrig. Diese Punkte liegen nicht mehr fest; es ist eine Bewegung in Richtung senkrecht zur Stabebene möglich; also die vier bedingungsgemäß gewählten Verschiebungen $\varDelta e_1 \cdots \varDelta e_4$ können wohl beliebig groß, müssen aber in diesen Richtungen angenommen werden. Bei dem früheren Verfahren war aber gerade in dieser Richtung die Summe der Komponenten gleich Null zu setzen.

Der Gang dieser Müller-Breslauschen Methode erscheint sehr übersichtlich, da die ganze Rechnung auf die Lösung der Grundaufgabe zurückgeführt; sie liefert in der praktischen Ausführung recht klare Rechnung, dürfte aber im allgemeinen kaum weniger Arbeit bieten, wie das Verfahren der Stabvertauschung und der Knotenpunktsbedingungen.

58. Es bleibt noch das kinematische Verfahren von Mohr[1]) zu besprechen, der ebenfalls von der Gleichung:

$$S_{ik} \cdot \varDelta s_{ik} = \Sigma (X_r \cdot \delta x_r + Y_r \cdot \delta y_r + Z_r \cdot \delta z_r)$$

ausgeht, aber die Verrückungen in etwas anderer Weise, wie Müller-Breslau, bestimmt.

Zur Beschreibung des Verfahrens sei abermals das System der Abb. 76 zu Grunde gelegt, allgemein wiederum ein Gebilde, das einen unteren starren Teil besitzt, an das der Reihe nach n Punkte angeschlossen sind. Es soll die Spannung T_1 ermittelt werden. Nach Entfernung dieses Stabes entsteht eine zwangläufige Kette, d. h. ein bewegliches System, bei dem nach Annahme einer bedingungsgemäßen Verrückung alle anderen $(3n-1)$ Verrückungen der n angefügten Punkte bestimmt sind, damit auch $\varDelta t_1$ durch die Verrückung der Endpunkte des Stabes T_1.

Um jede dieser Verrückungen durch die angenommene auszudrücken, nimmt nun Mohr nicht von vornherein alle m störenden Stäbe fort, die nötig sind, um das gegebene Fach-

[1]) Zentralbl. d. Bauv. 1902 u. 1903. — Abh. a. d. techn. Mech., S. 451. — Daß Mohr schon vor Müller-Breslau das Prinzip der virtuellen Verrückungen verwendete, wurde auf S. 43 betont.

werk in ein bewegliches System zu verwandeln, bei dem an das labile Endsystem je ein Punkt durch drei Stäbe angeschlossen ist, sondern er betrachtet direkt das System mit einer Bewegungsfreiheit, bei dem nur der eine Stab, im Beispiel T_1, fehlt. Es darf demgemäß nur eine Verrückung beliebig angenommen werden und durch diese sind alle übrigen $(3n - 1)$ Verrückungen auszudrücken.

Man könnte dies dadurch erreichen, daß man für jeden der $(3n - 1)$ Stäbe des oberen Teiles (es sind nur $(3n - 1)$ Stäbe, da ja der mit der zu berechnenden Spannung fehlt) die Gleichung (47) ansetzt, doch führt es Mohr in der Weise aus, daß er für jeden der $(3n - 1)$ Stäbe die Schubgeschwindigkeit verwendet, und so $(3n - 1)$ Gleichungen mit $3n$ unbekannten Verrückungen $\delta x_1, \delta y_1 \cdots \delta z_n$ erhält; eine derselben wird dann angenommen, die anderen werden durch diese ausgedrückt und die erhaltenen Werte ohne weiteres in die Gleichung (46) eingesetzt.

Unter der Schubgeschwindigkeit eines Stabes r, s versteht man die Projektion der wirklichen Verschiebung des einen z. B. r. Punktes auf die Stabrichtung r, s, bezw. die Summe aus den Projektionen von δx_r, δy_r, δz_r in dieser Richtung. Die am anderen Endpunkt s des Stabes aufgestellte Schubgeschwindigkeit desselben muß geradeso groß sein, wie die mittels des r. Punktes gefundene; durch Gleichsetzung der beiden Werte erhält man eine Bedingungsgleichung, im ganzen also der Zahl der Stäbe entsprechend deren $3n - 1$.

Es handelt sich jetzt natürlich darum, die zu betrachtenden Stäbe und damit die $(3n - 1)$ Gleichungen in solcher Reihenfolge anzuordnen, daß die $(3n - 1)$ unbekannten Verrückungen leicht zu ermitteln sind. Zu diesem Zweck gehe man von Stäben aus, deren einer Endpunkt ruht, also von Stäben, die vom unteren starren Teil auslaufen, d. i. 29, 30, 19, 31 $\cdots$. Die Schubgeschwindigkeiten derselben sind mit Rücksicht auf den unteren Endpunkt gleich Null. Stellt man nun diese Ausdrücke an den oberen Endpunkten VI, VIII, X, XII auf, nach denen je zwei Stäbe laufen, und setzt sie gleich Null, so erhält man

jedesmal für die drei Verrückungen δx_6, δy_6, $\delta z_6 \cdots$ zwei Bedingungsgleichungen, aus denen ihr Verhältnis berechnet werden kann, oder also es sind je die drei Verrückungen von einer Größe abhängig, etwa ε_1, bezw. ε_2, ε_3, ε_4.

Hierauf geht man am zweckmäßigsten zu den Punkten über, die mit den bereits betrachteten je durch drei Stäbe verbunden sind, also zu V, VII, IX, XI, und erhält so für die drei Verrückungen eines jeden dieser Punkte drei Gleichungen, indem man die Schubgeschwindigkeiten für die drei betreffenden Stäbe aufstellt. Man kann demgemäß auch diese Verschiebungen durch $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_4$ ausdrücken. Alsdann faßt man weiter die Oberringpunkte I, II, III, IV ins Auge, die wiederum durch je drei Stäbe an bereits benützte Punkte angeschlossen sind, kann demnach auch ihre Verschiebungen durch die vorhergehenden und demgemäß durch $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_4$ darstellen.

Es sind also bis jetzt alle Verrückungen durch vier noch unbestimmte Größen ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 ausgedrückt. Nun wurde aber noch gar nicht berücksichtigt, daß ja drei der vier oberen Ringstäbe vorhanden sind. Indem man noch für diese an ihren Endpunkten die Schubgeschwindigkeiten aufstellt und gleichsetzt, gewinnt man eine Gleichung zwischen den Verschiebungen von II und III, eine weitere für diejenigen von III und IV und eine solche von IV und I. Da nun diese verschiedenen Verrückungen durch ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 ausgedrückt sind, so erhält man schließlich drei Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
f_2\,(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_4) &= f_3(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_4)\\
f_3'(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_4) &= f_4(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_4)\\
f_4'(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_4) &= f_1(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_4),
\end{aligned}
$$

so daß man hiernach drei dieser Werte ε_i und somit sämtliche Verrückungen δx_r, δy_r, δz_r (die ja bereits abhängig von den vier Größen ε_i dargestellt sind) durch eine derselben ausdrücken kann. Man nimmt demgemäß einen dieser Verrückungswerte ganz beliebig an, rechnet hierauf alle Werte δ_r und $\varDelta t_1$ aus und erhält damit lauter zusammengehörige, bedingungsgemäße Verrückungen, weil man ja durch die Benutzung der

verschiedenen Stäbe der Bewegungsmöglichkeit der Kette Rechnung getragen hat. Es steht hiernach der Anwendung der Gleichung (46) nichts mehr im Wege:

$$T_1 \cdot \varDelta t_1 = \Sigma P_r \cdot \delta_r .$$

59. Da die Aufstellung der Schubgeschwindigkeiten der Stäbe keine Schwierigkeiten bietet, ist dies Mohrsche Verfahren leicht und ohne wesentliche Gedankenarbeit anwendbar. Es fällt sogar die so einfache Überlegung fort, wie man die Verschiebungen $\varDelta e$ als mit den Bedingungen des Systems verträglich einzuführen hat. Der Zusammenhang des Mohrschen und Müller-Breslauschen Verfahrens ist wohl an der gegebenen Beschreibung zu erkennen. Nach Mohr kommt man bei diesem Beispiel für die verschiedenen Verschiebungen δ_r auch zunächst auf Funktionen von vier Größen $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_4$; nun nimmt aber Mohr nicht die Umrechnung vor, wie Müller-Breslau, sondern führt direkt die Bedingungen der drei noch vorhandenen störenden Stäbe T_2, T_3, T_4 ein und erhält so bei fehlendem Stab T_1 ein System von virtuellen Verrückungen. Er hat also für jeden fortgenommenen Stab aufs neue die drei Bedingungsgleichungen der noch vorhandenen störenden Stäbe aufzustellen, eine allerdings gewöhnlich leicht zu lösende Aufgabe, nachdem man sie für einen der störenden Stäbe durchgeführt. Müller-Breslau dagegen drückt zunächst die vier Werte $\varDelta t_1 \cdots \varDelta t_4$ durch die vier Größen $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_4$ aus, stellt dann umgekehrt die ε_i und δ_r als Funktionen gleich aller $\varDelta t_i$ dar und setzt zur Bestimmung von T_i den Wert $\varDelta t_i = 1$, die anderen Null, kann also alsdann sofort die Spannung jedes störenden Stabes hinschreiben.

Daß nicht nur ein kinematisches Verfahren die Möglichkeit bietet, eine beliebige Stabspannung als lineare Funktion allgemeinster Kräftewirkung darzustellen, daß dies vielmehr jede Methode erlaubt, ist selbstverständlich und wurde speziell für die Stabvertauschung schon erwähnt. Wohl erscheint hierfür das kinematische Verfahren zunächst vielleicht als günstiger, aber in praktischen Fällen ist doch eine rechte Fülle von

rechnerischen Operationen notwendig, so daß es gewöhnlich gegenüber den andern Methoden kaum eine Zeitersparnis bedeutet.

60. Diesen verschiedenen Verfahren von Henneberg, Müller-Breslau, Mohr, die mit den Spannungen von störenden Stäben rechnen und diese zunächst als äußere Kräfte einführen, steht isoliert gegenüber das Momentenverfahren. Nach demselben geht man in der Weise vor, daß man zur Bestimmung einer oder mehrerer (ν) Stabspannungen derartige Schnitte legt, daß sich 1 bezw. ν Gleichungen aufstellen lassen, die die verschiedenen Spannungen enthalten und ihre Berechnung erlauben. Bei verschiedenen speziellen Kuppeln wird von diesem Verfahren Gebrauch gemacht werden.

§ 18. Flechtwerke.

61. Mittels Stabvertauschung kann ein nach dem ersten Bildungsgesetz hergestelltes Fachwerk in der mannigfaltigsten Weise in ein anderes Fachwerk übergeführt werden, und es bietet sich so die Möglichkeit, die verschiedenartigsten Systeme zu bilden. Unter diesen spielt nun eine Gattung von besonderer Anordnung eine wichtige Rolle: die Flechtwerke, auf die Föppl[1]) zuerst aufmerksam machte.

Unter Flechtwerk soll ein System von Stäben verstanden werden, die auf dem Mantel eines einfach zusammenhängenden Raumes liegen und sich in lauter aneinander stoßenden Dreiecken einordnen.

Diese verschiedenen Stabdreiecke können alle in verschiedenen Ebenen liegen, es können sich aber auch eine größere Anzahl derselben in einer Ebene befinden. So ist z. B. das in Abb. 81 gezeichnete Stabsystem eines Brückenträgers mit obenliegender Fahrbahn ein Flechtwerk.

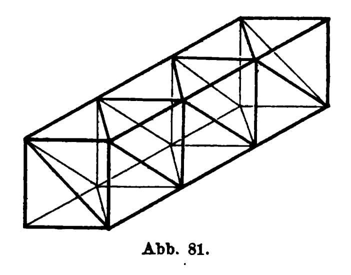


Abb. 81.

[1]) Schweiz. Bauztg. 1884. — Das Fachwerk i. Raum, Leipzig 1892, S. 55. — D. graph. Statik, 2. Aufl., S. 274.

Von diesen speziellen Stabsystemen bewies Föppl, daß dieselben immer $(3n - 6)$ Stäbe haben, d. h. soviel, wie ein statisch bestimmtes freies Raumsystem besitzen muß. Um dieses zu beweisen, geht er von dem Eulerschen Satze aus, wonach die Anzahl der Kanten k eines Polyeders, die Zahl der Ecken e und der Seitenflächen f durch die Beziehung verbunden sind:

$$k = e + f - 2.$$

Wendet man nun diese Formel auf ein Polyeder an, dessen Seitenflächen lauter Dreiecke sind, so vereinfacht sich dieselbe. Würden die Dreiecke nicht zusammenhängen, so wäre die Anzahl der Kanten k bei f Flächen gegeben durch $k = 3f$. Nun kommt aber tatsächlich jede Kante zweimal, nämlich für zwei nebeneinander liegende Dreiecke, in Betracht, also ist:

$$k = \frac{3f}{2},$$

$$f = \frac{2}{3} k,$$

und demnach findet sich die Gleichung:

$$k = e + \frac{2}{3} k - 2,$$

$$k = 3e - 6,$$

d. h.: Die Anzahl der Kanten ist gleich der dreifachen Zahl der Ecken vermindert um 6. Ersetzt man die Kanten durch Stäbe, die Ecken durch Knotenpunkte, so erhält man also sicher ein räumliches Stabsystem (Flechtwerk) mit $(3n - 6)$ Stäben.

An der Formel kann sich nichts ändern, wenn die Stabdreiecke zum Teil in derselben Ebene liegen, so daß damit ganz allgemein bewiesen ist, daß jedes Flechtwerk $(3n - 6)$ Stäbe besitzt, also gerade soviel, wie zur Herstellung eines statisch bestimmten Raumfachwerks nötig sind. Damit ist natürlich noch keineswegs gesagt, daß auch jedes Flechtwerk stabil ist, doch läßt sich vielfach leicht übersehen, ob dies für ein gegebenes System der Fall ist. Wenn alle Dreiecke in verschiedenen Ebenen liegen, ist dies immer der Fall; liegt ein Teil derselben in der gleichen Ebene, so steht der Stabilität

nichts im Wege, aber das System braucht nicht immer stabil zu sein, und zwar ist die Stabilität ganz ausgeschlossen, wenn sich die um einen Knotenpunkt herum liegenden Dreiecke in derselben Ebene befinden. Es würde z. B. Abb. 81 ein stabiles Raumsystem darstellen, dagegen Abb. 82 nicht; die markierten Knotenpunkte der oberen Fläche liefern bei allgemeiner Belastung keine eindeutigen Spannungen.

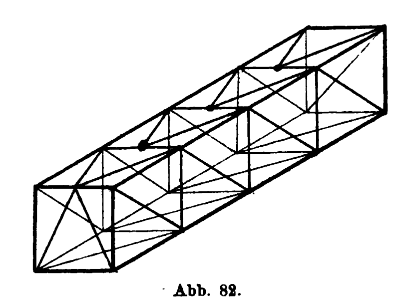
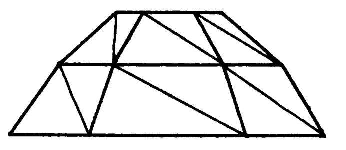


Abb. 82.

Flechtwerkssysteme lassen sich nun in der verschiedensten Weise bilden: man kann ein beliebiges Dreieckssystem über irgend eine Fläche ausbreiten; so z. B. die Kugel durch Meridiane und Parallelkreise mit Vierecken überziehen, und dann in jedes solches eine Diagonale einfügen. Bei Zylinder und Kegel können an die Stelle der Meridiane die Mantellinien treten, doch müssen hierbei natürlich noch in ihren Endflächen Stäbe (Diagonalen) eingezogen werden, die dieselben in Dreiecke teilen. Man würde auf diese Weise Prisma- und Pyramidenflechtwerke erhalten. Die meisten Kuppeln, die ausgeführt werden, sind auch Teile von Flechtwerken, da sich die Stäbe nur auf dem äußeren Mantel befinden und in Dreiecken angeordnet sind; so zeigt z. B. Abb. 83 das Stabsystem der Schwedler-Kuppel. Auch die regelmäßigen Polyeder kann man zur Herstellung von Flechtwerken benutzen; sie stellen zum Teil (Oktaeder, Ikosaeder) direkt ein Flechtwerk dar, wenn nämlich die einzelnen Begrenzungsebenen Dreiecke sind.



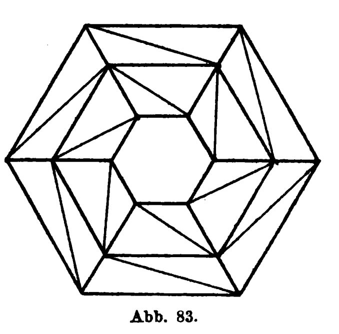
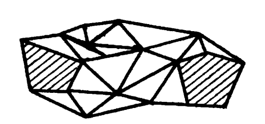


Abb. 83.

62. Außer den seither besprochenen Föpplschen Flechtwerken, die einen einfach zusammenhängenden Raum umschließen, lassen sich natürlich auch solche bilden, die einen mehrfach zusammenhängenden Raum umgrenzen. Im Gegensatz zu den ersterwähnten Flechtwerken mögen sie zweifache, dreifache ··· Flechtwerke genannt werden, je nachdem der räumliche Ring 1 oder 2 oder $(r-1)$ innere Öffnungen besitzt. Haben auch derartige Flechtwerkssysteme die richtige Anzahl von Stäben? Man betrachte ein zweifaches Flechtwerk, das in Abb. 84 im Grundriß und Vertikalschnitt dargestellt ist. Um es zu bilden, gehe man von einem ringförmigen, einfachen Flechtwerk aus, dessen beide Endflächen μ bezw. ν Eckpunkte besitzen, also $(\mu - 3)$ bezw. $(\nu - 3)$ Diagonalen haben. Ein solches System besitzt sicher $(3n - 6)$ Stäbe. Nun leite man aus demselben ein zweifaches Flechtwerk ab, indem man die Öffnung derart schließt, daß auch dieser Mantelteil von lauter Dreiecken umgeben ist, und die $(\mu - 3 + \nu - 3)$ Diagonalen entfernt. Zu der gewünschten Schließung sind $\mu + \nu$ Stäbe erforderlich; da aber andererseits $(\mu + \nu - 6)$ Stäbe entfernt werden, so sind zur Herstellung des zweifachen Flechtwerks aus dem ersten



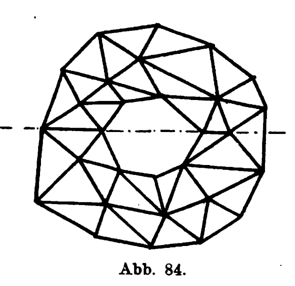


Abb. 84.

$$\mu + \nu - (\mu + \nu - 6) = 6$$

neue Stäbe nötig. Demnach ist das zweifache Flechtwerk, das einen zweifach zusammenhängenden Raum umschließt, also eine innere Öffnung besitzt, sechsfach statisch unbestimmt.

Von dem zweifachen Flechtwerk kann man in entsprechender Weise zum dreifachen übergehen (Abb. 85) und man erkennt, daß letzteres wiederum sechs Stäbe mehr besitzt, als ersteres, also im ganzen $2 \cdot 6$fach statisch unbestimmt ist. Die Ausführungen lassen sich allgemein erweitern und ergeben

das Resultat: Ein $r$fach zusammenhängendes Flechtwerk, d. h. ein Mantelgebilde, das $(r-1)$ innere Öffnungen enthält, und dessen Stäbe nur in Dreiecken auf dem Mantel angeordnet sind, besitzt, als Raumfachwerk betrachtet, $(r-1) \cdot 6$ Stäbe zu viel. Als spezieller Fall ist in dieser Formel das einfache Flechtwerk enthalten, das $(1-1) \cdot 6$ fach statisch unbestimmt, also statisch bestimmt ist.

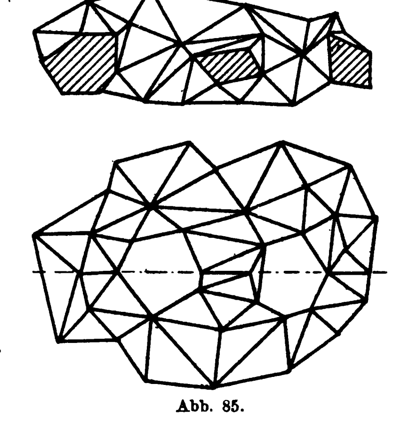


Abb. 85.

Wie später (§ 31) ausgeführt wird, spielt der Begriff der Flechtwerke für die Kuppelsysteme eine wichtige Rolle, da sich hierdurch die Stabilitätsuntersuchung wesentlich erleichtert, und sich insbesondere die Möglichkeit bietet, allgemeine Regeln zur Herstellung von neuen Kuppeln aufzustellen.

Viertes Kapitel.

Gestützte Raumsysteme.

§ 19. Allgemeines. Das erweiterte System.

63. Um ein freies Raumfachwerk als Raumträger zu benutzen, ist es nötig, dasselbe gegenüber der starren Erde festzulegen. An die Stelle der letzteren kann wiederum ein starres Fachwerk, das Erdfachwerk, eingeführt werden, sodaß zur Herstellung des Raumträgers das freie Fachwerk mit dem Erdfachwerk unverschieblich zu verbinden ist, daß also das ganze System, erweiterte System,[1]) wieder ein starres Fachwerk

[1]) Henneberg-Schlink, Ztschr. f. Arch. u. Ingw. 1903, S. 157. — Schlink, ebenda 1904, S. 183.

darstellt.[1]) Hierzu sind nach früherem sechs Verbindungsstäbe notwendig. Demnach bedarf ein freies Fachwerk zur sicheren Stützung sechs Auflagerstäbe oder sechs Lagerbedingungen, da ja jeder Stab eine Bedingung (Unbekannte) darstellt. Gewöhnlich werden aber die Stabsysteme nicht durch Stützungsstäbe gegen die Erde festgelegt, sondern es werden Lager eingeführt. Man unterscheidet hierbei feste Auflager, Kurven- (Linien-, Gerade-) Lager und Flächen- (Ebenen-) Lager. Erstere haben eine völlig feste Lage, die Linienlager sind so eingerichtet, daß die Bewegung nur auf einer Linie (Geraden) erfolgen kann, während sich das Flächenlager auf einer Fläche, speziell einer Ebene, völlig frei bewegen kann. Praktisch wird das Kurvenlager als Rollen- oder Stelzenlager oder Pendelstütze ausgeführt, das Flächenlager als Kugellager.

Der Zusammenhang der Stützungsstäbe mit diesen Lagern ist leicht zu erkennen. Da bei dem Kugellager nur eine Kraft in der Richtung der Ebenennormalen auftritt, beim Rollenlager zwei Kraftkomponenten in der Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung, und beim festen Lager drei Komponenten entstehen, so kann offenbar das Kugellager durch einen Stützungsstab senkrecht zur Bewegungsebene ersetzt werden, das Linienlager durch zwei Stäbe in der Ebene senkrecht zur Bewegungslinie, das feste Lager durch drei beliebige Stäbe. Dasselbe lehrt auch die rein kinematische Betrachtung. Beim festen Lager soll der betreffende Punkt gegenüber der Erde eine unverschiebliche Lage haben; das wird erreicht durch drei ganz beliebige Stützungsstäbe, die aber nicht in einer Ebene liegen dürfen (Abb. 86). Einem Rollenlager entsprechen zwei Stützungsstäbe, die sich in einer Ebene senkrecht zur Gleitrichtung befinden (Abb. 87), denn ein Punkt, der durch zwei Stäbe an die Erde angeschlossen ist, kann sich auf einem Kreisbogen um die Gerade AB als Achse bewegen; denkt man sich die Stützungsstäbe

[1]) Vgl. Müller-Breslau, Zentralbl. d. Bauv. 1891, S. 440, sowie die Fußnoten vorn auf S. 49.

genügend lang, so nähert sich der Kreisbogen einer Geraden, die der Gleitrichtung des Rollenlagers entspricht. Da nun in Wirklichkeit die mögliche Beweglichkeit nur sehr klein ist, so kann für die kleine Strecke an Stelle des Kreisbogens eine

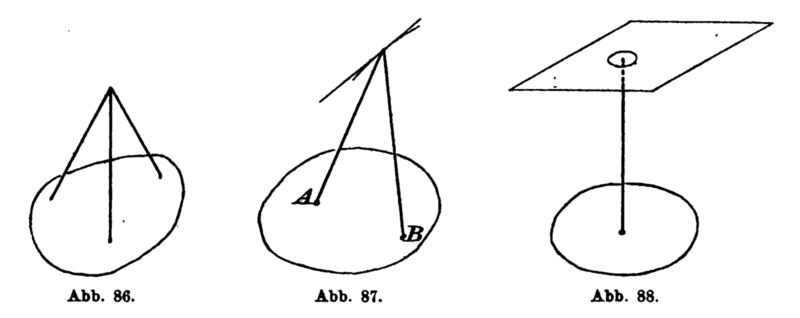


Abb. 86. Abb. 87. Abb. 88.

Tangente eingeführt werden; also sind die ersetzenden Stützungsstäbe so anzuordnen, daß die erwähnte Tangente mit der Gleitrichtung zusammenfällt. In ähnlicher Weise lassen sich die Verhältnisse beim Kugellager darstellen: ein Punkt, der durch einen Stab mit der Erde verbunden ist (Abb. 88) bewegt sich auf einer Kugelfläche; für die in Wirklichkeit mögliche, nur kleine Bewegung kann das betreffende kleine Kugelstück durch seine Tangentialebene ersetzt werden. Diese Ebene muß mit der Gleitebene zusammenfallen, also muß der dem Kugellager entsprechende Stützungsstab eine Lage senkrecht zur Gleitebene besitzen.

Man kann demnach jederzeit ein Lager durch Stützungsstäbe ersetzen und umgekehrt; für sehr viele Fälle ist es zweckmäßig, die Stützungsstäbe an Stelle der Lager für auftretende Untersuchungen zu benutzen, da hierdurch die ganzen Verhältnisse bei den gestützten Systemen wesentlich vereinfacht werden.

Bei der gewöhnlichen Berechnungsweise stellt man die Reaktion eines festen Lagers durch drei Komponenten dar, von denen eine vertikal, die beiden andern wagrecht und zwar senkrecht zueinander verlaufen, diejenige eines Gleitlagers durch zwei Komponenten, von denen die eine vertikal, die andere in

der Lagerebene senkrecht zur Bewegungslinie gerichtet ist. In diesen Komponentenrichtungen kann man natürlich auch die Stützungsstäbe einziehen, erhält durch ihre Spannungen direkt die Reaktionskräfte. Für viele Fälle empfiehlt sich gerade diese Anordnung der Stützungsstäbe als die zweckmäßigste.

64. Die sechs Stützungsstäbe, die zur Festlegung eines freien Fachwerks gegenüber der Erde nötig sind, müssen sich nach früheren Ausführungen in allgemeiner Lage befinden, dürfen demnach vor allem nicht eine solche haben, daß sie alle sechs von derselben Geraden getroffen werden können, da sonst das erweiterte System labil wäre. Ist das erweiterte System starr, dann ist auch der durch dasselbe dargestellte Raumträger stabil und umgekehrt: Werden bei einem stabilen gestützten Raumsystem die Lager durch Stützungsstäbe ersetzt und mittels des Erdfachwerks das erweiterte System eingeführt, so liegt unter allen Umständen ein stabiles, erweitertes System vor.

Durch Einführung des erweiterten Systems verlieren die Fachwerksträger ihre Sonderstellung: es wird ja durch dasselbe ein freies Fachwerk gewonnen und auf dieses können dann die früheren Regeln zur Stabilitätsuntersuchung angewendet werden.

Zur Herstellung des erweiterten Systems ist in der Wahl der Stützungsstäbe eine große Willkür vorhanden und das Erdfachwerk kann in der verschiedensten Weise angeordnet werden; nur ist zu beachten, daß die Stützungsstäbe von Knotenpunkten desselben ausgehen; (denn: würden dieselben von anderen Punkten der Stäbe auslaufen, so würden sie sich an auf Biegung beanspruchten Stellen befinden, und in Wirklichkeit müssen sie doch von völlig festen Erdpunkten ausgehen).

Das zunächst einfachste Erdfachwerk ist das Tetraeder; so ist z. B. das in Abb. 89 dargestellte erweiterte System[1])

---

[1]) Bei allen Figuren sind die Stützungsstäbe durch gestrichelte Linien, das erweiterte System durch Strichpunktierung angegeben.

sicher stabil, da der ausgezogene Teil als freies Fachwerk stabil ist und durch sechs Auflagerstäbe, die allgemeine Lage besitzen, mit dem Erdfachwerk verbunden ist.

Sollen die Spannungen in diesem System gefunden werden, so kann man zunächst nach dem früher angegebenen Verfahren diejenigen in den Stützungsstäben bestimmen, indem man durch dieselben einen Flächenschnitt legt; dann ist das freie Fachwerk zu betrachten, auf welches außer den gegebenen Lasten noch die Spannungen der Stützungsstäbe als äußere Kräfte wirken.

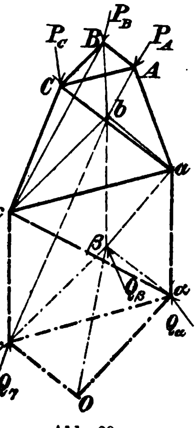


Abb. 89.

65. Um ein beliebiges erweitertes System als freies Fachwerk allgemein berechnen zu können, kann der schon bei den ebenen Systemen angegebene Hennebergsche Satz Vorteile bieten. Nach demselben sind an den Knotenpunkten des Erdfachwerks solche Kräfte Q_i anzubringen, die mit den äußeren Lasten P_i im Gleichgewicht stehen. In welcher Weise nun auch die Zusatzkräfte Q_i zugefügt werden, stets behalten hierbei die Spannungen in den Stützungsstäben und ursprünglichen Fachwerksstäben die gleiche, unveränderte Größe.

Im Raume werden am einfachsten nur drei Kräfte Q_i eingeführt, deren Resultante gleich und entgegengesetzt gerichtet ist derjenigen der P_i. Hat man nun ein Tetraeder als Erdfachwerk (Abb. 89), so kann man die Kräfte Q_i an den Punkten wirken lassen, von denen Stützungsstäbe auslaufen, so daß also an dem einen Knotenpunkt O keine Kraft Q wirkt; infolgedessen treten in den von O auslaufenden Stäben keine Spannungen auf, also können dieselben ($O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$) fortgelassen werden. Das geht auch daraus hervor, daß die drei nach O laufenden Stäbe nur den Zweck haben, den Punkt O festzulegen. Da demnach dieser Punkt O überflüssig ist, so ist das einfachste, räumliche Erdfachwerk ein Dreieck, das an die Stelle des Stabes der Ebene tritt.

Das einfachste erweiterte System für das oben angeführte Beispiel ist hiernach durch Abb. 90 dargestellt. Die angegebenen Kräfte Q_i halten den P_i das Gleichgewicht. Man kann von den Knotenpunkten des Erdfachwerks ausgehen, um die Spannung in den Stützungsstäben und dann diejenigen der oberen Stäbe zu finden: Man zerlege an α die Kraft Q_α in eine Komponente in Richtung $\alpha\beta$, und eine solche in die Ebene $\alpha\gamma c a$, in der die drei anderen Stäbe liegen, und erhält damit die Spannung in $\alpha\beta$. Man kann sie auch etwa dadurch finden, daß man das Moment der um α gelegenen Stäbe bezüglich einer Achse in der Ebene $\alpha\gamma c a$ aufstellt; da sich die drei Stäbe $\alpha\gamma$, αc, αa in dieser Ebene befinden, haben sie kein Moment, also entsteht eine Gleichung mit einer Unbekannten. Entsprechend ermittelt man die Spannung in $\beta\gamma$ an Knotenpunkt β und $\gamma\alpha$ an Knotenpunkt γ.

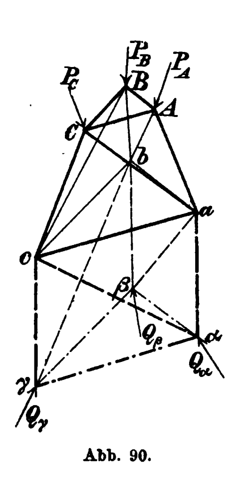


Abb. 90.

In diesem Beispiel ist allerdings die eben erwähnte Ermittelung der Spannungen nicht der einfachste Weg; es ist hier möglich, von den Knotenpunkten A, B, C ausgehend zunächst nacheinander die Spannungen in den Stäben AC, CB, BA zu bestimmen (da ja jedesmal die drei anderen Stäbe in einer Ebene für sich liegen), dann an A diejenigen Aa und Ab, und entsprechend an C und B diejenigen in Cc, Ca und Bc, Bb. Hierauf kann man etwa in derselben Weise an a, b, c verfahren und erhält so die Spannungen in den unteren Ringstäben und den Stützungsstäben. Diese letzteren können auch, wie schon erwähnt, unabhängig von den anderen Stäben dadurch ermittelt werden, daß man durch dieselben einen Flächenschnitt legt, dann zur Bestimmung von $c\alpha$ die Linie $b\beta$ als Momentenachse benutzt, auf der sich die fünf anderen Stäbe schneiden usw. Die Resultante der Stäbe $a\alpha$ und $a\beta$ stellt die bei der gewöhnlichen Lagerung, Kurvenlager in a, auftretende wirkliche

Lagerreaktion in a dar, die Resultante der Spannungen $c\alpha$, $c\gamma$ liefert die Reaktion in c und diejenige von $b\gamma$, $b\beta$ die Reaktion in b.

§ 20. Verschiedene Möglichkeiten zur Herstellung von gestützten Raumfachwerken.

66. Es wurde bisher zur Herstellung eines gestützten Systems nur davon gesprochen, daß ein freies stabiles Fachwerk durch sechs Stützungsstäbe mit dem Erdfachwerk verbunden wird. Da die Anzahl s der Fachwerksstäbe gegeben ist durch

$$s = 3n - 6,$$

die der Stützungsstäbe durch:

$$r = 6,$$

ist für das so erhaltene gestützte Raumsystem (Fachwerksträger) die Zahl der Fachwerksstäbe vermehrt um die Zahl der Stützungsstäbe gleich der dreifachen Knotenpunktzahl. Nun kann man aber in dem durch die Stützung erhaltenen erweiterten System zwischen den Fachwerks- und Stützungsstäben die verschiedensten Stabvertauschungen vornehmen, wobei aber natürlich darauf zu achten ist, daß die Stabilität des erweiterten Systems nicht gestört wird. Man erhält hierdurch mannigfaltige erweiterte Systeme, und wenn man die Stützungsstäbe durch Lager ersetzt, die verschiedensten gestützten Gebilde, bei denen die Anzahl der Lagerbedingungen gleich der Anzahl r der Stützungsstäbe ist. Da sich nun durch die Stabvertauschung die Summe von Fachwerksstäben und Stützungsstäben nicht geändert hat, so gilt für statisch bestimmte räumliche Fachwerksträger der Satz:

Bei jedem gestützten, statisch bestimmten Raumsystem ist die Summe von Fachwerksstäben und Stützungsstäben konstant,[1]) nämlich gleich der dreifachen Anzahl der Knotenpunkte:

$$s + r = 3n. \tag{48}$$

---

[1]) vgl. d. Bem. auf S. 51.

Wenn also ein Flechtwerk gelagert wird, sind nur sechs Lagerbedingungen einzuführen; fehlt aber in dem freien System (Flechtwerk) ein Stab, so müssen sieben Lagerbedingungen vorhanden sein usw. In dieser Weise läßt sich häufig bei gestützten Systemen ohne besonderes Nachzählen erkennen, ob dieselben die richtige Stabzahl haben, oder zuviel oder zuwenig Stäbe.

Bei der erwähnten Stabvertauschung in dem erweiterten System dürfen selbstverständlich keine Erdfachwerksstäbe mit anderen vertauscht werden; denn dieser Fachwerksteil muß für sich unbedingt starr sein, da er die feste Erde darstellt; wie er im übrigen angeordnet ist, wieviel Knotenpunkte er besitzt, ist ganz unwesentlich.

67. In den Figuren 91—94 sind Raumsysteme dargestellt, bei denen das Ausgangssystem ein liegendes Flechtwerk ist. Wie erwähnt, sind bei den sechs Stützungsstäben besondere Lagen zu vermeiden, vor allem dürfen sie nicht von derselben Linie getroffen werden, also dürfen sich nicht mehr als drei Stäbe in einem Punkte schneiden, auch nicht je drei in einem Punkte zusammentreffen, nicht mehr als drei in einer Ebene liegen, auch nicht die Stäbe in zwei Ebenen einfach verteilt sein. Es dürfen z. B. die Stützungsstäbe nicht nach Art der Abb. 60, 61 angeordnet sein; demgemäß wäre ein räumlicher Brückenträger, der die Form des in Abb. 81 angegebenen Flechtwerkes besitzt, nicht stabil, wenn er nach Abb. 91 auf zwei Rollenlagern und zwei Kugellagern gestützt wird.

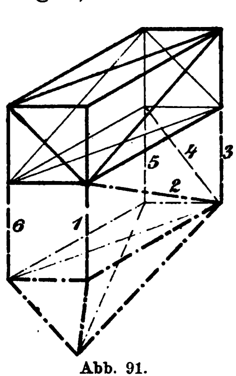


Abb. 91.

Wenn man die Sache weiter verfolgt, erkennt man leicht, daß es überhaupt unmöglich ist, einen derartigen Raumträger auf horizontaler Fläche mittels sechs Auflagerbedingungen in vier Punkten zu lagern, denn wenn die Auflager durch Stützungsstäbe ersetzt werden, gibt es immer eine Linie, die alle sechs Stützungsstäbe trifft. Das würde z. B.

auch eintreten bei der in Abb. 92 angegebenen[1]) Lagerung, da die sechs Stützungsstäbe die unendlich ferne Gerade (Schnittlinie der beiden parallelen Ebenen) treffen; es könnte sich das System bei dieser Lagerung senkrecht zur Längsachse bewegen, da ja a und b Kurvenlager mit Gleitrichtung ab darstellen, und c und d Kugellager bedeuten.

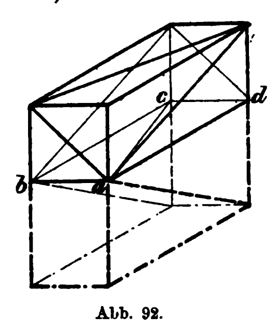


Abb. 92.

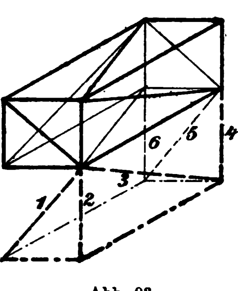


Abb. 93.

In drei Punkten kann der Träger auf horizontaler Lagerfläche sicher unterstützt werden; so ist z. B. Abb. 93 ein stabiler Raumträger, denn die sechs Stützungsstäbe besitzen allgemeine Lage. Von diesem System ausgehend, kann man durch Vertauschung der Fachwerks- und Stützungsstäbe die verschiedenartigst gelagerten Brückensysteme erhalten, die alle statisch bestimmt sind.[2])

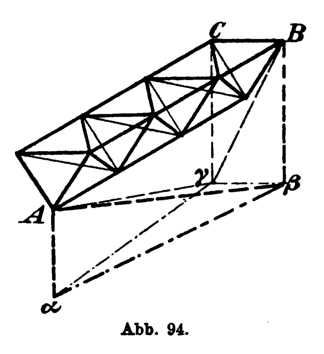


Abb. 94.

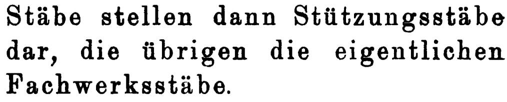
Der theoretisch einfachste Brückenträger ist übrigens nicht das seither betrachtete System, sondern ein solches, bei dem statt des vierseitigen Flechtwerks ein dreiseitiges verwendet wird (Abb. 94). Bei diesem ist je ein Knotenpunkt durch drei Stäbe angeschlossen und das so erhaltene freie Fachwerk

[1]) In verschiedenen der folgenden Abbildungen ist das Erdfachwerk nur angedeutet.

[2]) Schlink, Brückenträger als Raumfachwerke. Vhdlgen. d. V. f. Gewerbefleiß, 1905, S. 95.

mittels sechs Stützungsstäben bezw. Lagerbedingungen gestützt. Bei der angegebenen Verteilung der Stützungsstäbe können die Spannungen mittels der Momentenmethode leicht gefunden werden, indem die Gleichungen für die Achsen $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ je eine Unbekannte (Diagonale der Stützungsstäbe) enthalten. Es bedeutet in der angegebenen Stützung: A ein festes Lager, B ein Rollen- und C ein Kugellager.

68. Das eben betrachtete Verfahren zur Herstellung eines gestützten Systems mittels der sechs Stützungsstäbe ist nicht die einzige Möglichkeit; man kann vielmehr ein erweitertes System und damit einen Raumträger auch dadurch herstellen, daß man ausgehend von dem Erdfachwerk weitere Knotenpunkte nach dem ersten Bildungsgesetz anfügt, d. h. durch je drei Stäbe, die nicht in derselben Ebene liegen. Die von dem Erdfachwerk auslaufenden


Stäbe stellen dann Stützungsstäbe dar, die übrigen die eigentlichen Fachwerksstäbe.

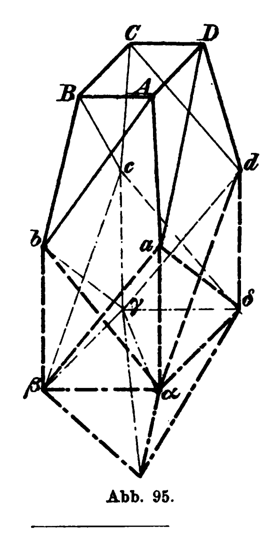


Abb. 95.

Auf diese Weise ist z. B. das System Abb. 95 entstanden: die Punkte a, b, c, d sind durch je drei Stützungsstäbe festgelegt und die weiteren Punkte unbeweglich angeschlossen.[1]) Daß ein derartiges System starr ist, ist selbstverständlich, da ja das Erdfachwerk ein stabiles unverschiebliches System darstellt. Ersetzt man die Stützungsstäbe durch Auflager, so wird ein System erhalten, bei dem die Punkte des unteren Rings alle in festen Lagern ruhen und die Verbindungsstäbe dieser

[1]) Daß dies der Fall ist, geht daraus hervor, daß es für die Stabilität einerlei ist, in welcher Weise die Diagonalen in den Trapezfeldern $ABba, \cdots$ angeordnet sind, da durch sie das ebene Feld steif zu gestalten ist; denkt man nun statt aD den Stab Ad, und statt Bc: Cb, so sind A und C durch drei Stäbe an die unteren Punkte angeschlossen, dann B und D durch drei Stäbe festgelegt.

Punkte fehlen. Es ist natürlich nicht notwendig, daß diese Punkte $a \cdots d$ nur durch Stützungsstäbe festgelegt werden, man kann vielmehr das erweiterte System auch in anderer Weise bilden, z. B. Punkt a und c durch drei Stützungsstäbe festlegen, dann b durch einen Stützungsstab $b\beta$ und zwei Fachwerksstäbe ba, bc anschließen, entsprechend d durch $d\delta, dc, da$. In dem so erhaltenen System sind nur acht Stützungsstäbe vorhanden, in dem ersteren aber zwölf; dafür fehlen in ersterem die vier unteren Ringstäbe, die nun vorhanden sind. Man kann also sagen: In dem System der Abb. 95 wurde eine Stabvertauschung zwischen vier Stützungsstäben und den vier Unterringstäben vorgenommen und damit das letzterwähnte System gewonnen.

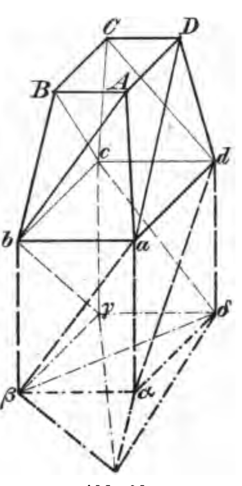


Abb. 96.

Die Stabvertauschung kann man auch in anderer Weise ausführen, indem man z. B. die acht Stützungsstäbe nach Abb. 96 verteilt. Man erhält so ein System, das die Unterringstäbe als notwendige Stäbe besitzt und auf lauter Gleitlagern mit Bewegungsfähigkeit senkrecht zu den Ringstäben gestützt ist (Müller Breslausche Lagerung).[1])

Nach den vorhergehenden Ausführungen kann man einen beliebigen Raumträger in folgender Weise herstellen, entsprechend der Bildung eines beliebigen freien Fachwerks:

Man bildet nach dem ersten oder zweiten Bildungsgesetz das erweiterte System, indem man das starre Erdfachwerk einführt, und nimmt dann eventuell noch beliebige Stabvertauschungen zwischen Fachwerks- und Stützungsstäben vor, aber in der Art, daß die Stabilität des Systems nicht beeinflußt wird. Bei Ersetzung der Stützungsstäbe durch die üblichen Lager wird der Raumfachwerksträger erhalten.

[1]) Zentralbl. d. Bauv. 1892, S. 203.

69. Soll die Stàbilität eines vorliegenden Fachwerksträgers untersucht werden, so könnte man nach obigen Bemerkungen in der Weise vorgehen, daß man nachsieht, ob derselbe mittels richtiger Stabvertauschung in ein solches erweitertes System verwandelt werden kann, das nach dem ersten oder zweiten Bildungsgesetz hergestellt ist.

Diese Methode wurde bereits bei der Untersuchung der Systeme Abb. 74 und 76 angewendet, die ja als gestützte bezw. erweiterte Systeme angesehen werden können, indem man den starren unteren Teil als Erdfachwerk, die von dessen Knotenpunkten auslaufenden Stäbe als Stützungsstäbe auffaßt. Es wurde nun eine Stabvertauschung vorgenommen und damit das gegebene System in ein solches übergeführt, das nach dem ersten Bildungsgesetz hergestellt ist, und so zunächst gezeigt, daß es die richtige Stabzahl besitzt. Dann war natürlich noch zu untersuchen, ob die benützte Stabvertauschung berechtigt; dies geschah mittels der Determinante der Stabvertauschung oder des Satzes, daß beim Fehlen von äußeren Kräften in allen Stäben die Spannung Null auftreten muß, und es entstand hierdurch als Bedingung jedesmal dieselbe Determinante vom zweiten bezw. vierten Grade, die einen von Null verschiedenen Wert erhalten mußte.

Die Vornahme der Stabilitätsuntersuchung wird bei neu ersonnenen Stabsystemen vielfach zweckmäßig sein, bevor man an die Berechnung derselben geht. Wohl weiß man, daß ein Gebilde, das durch beliebige äußere Kräfte lauter eindeutige und endliche Spannungen erhält, auch sicher stabil ist. Aber wenn sich vieldeutige oder unendlich große Werte ergeben, ist das System unbrauchbar, die ganze Berechnungsarbeit war umsonst. Die reine Stabilitätsuntersuchung ist wesentlich rascher zu erledigen, da ja die betreffende Determinante von den äußeren Lasten ganz unabhängig ist. Deswegen ist es angebracht — nachdem die richtige Stabzahl erkannt ist — zunächst die Nennerdeterminante D der Gleichungen (36), die bei μ störenden Stäben vom μ. Grade ist, aufzustellen, und nachzusehen, ob sie von Null verschieden ist, dann erst — wenn man

sich davon überzeugt hat — die verschiedenen Zählerwerte zur Bestimmung der Spannungen auszurechnen.

Vielfach ist es jedoch zweckmäßiger, nicht diese Determinante aufzustellen, sondern nachzusehen, ob beim Fehlen von äußeren Kräften in allen Stäben eines Systems mit richtiger Stabzahl die Spannung Null eindeutig auftritt, und hieraus auf die Stabilität zu schließen. Wenn man hierbei von störenden Stäben ausgeht (wie in § 16), kommt man allerdings auf dieselbe Determinante wie oben; aber bei vielen Raumfachwerken kann man in anderer Weise ohne viele Mühe erkennen, ob die Spannung Null eindeutig auftritt, und dann ist dieses Verfahren der Stabilitätsuntersuchung das einfachste.

Will man die reine Stabilitätsuntersuchung möglichst schnell durchführen, so gehe man von dem betreffenden System über zu einem solchen, das in derselben Art gebaut, aber völlig symmetrisch gestaltet ist. Ist dieses stabil, so kann man schließen, daß auch das allgemeinere System starr ist, und gerade für symmetrische Gebilde ist es ein leichtes, die Untersuchung durchzuführen, z. B. die betreffende Determinante aufzustellen; hierbei wird man, wie schon in § 14 erwähnt, meistens statt mit der geringstnotwendigen Zahl mit einer größeren schneller zum Ziele kommen.[1])

§ 21. Gerüstsysteme.

70. Die verschiedenen Brückensysteme zeichneten sich dadurch aus, daß das Flechtwerk in liegender Gestalt gelagert wurde. Einen gewissen Gegensatz hierzu bilden die Raumfachwerke, bei denen ein Flechtwerk in stehender Gestalt benützt wird, wie z. B. in Abb. 95, 96. Solche kommen in Betracht für Führungsgerüste von Gasometern, Pfeiler, Krangerüste usw.

Das in Abb. 97 dargestellte Flechtwerk ist statisch bestimmt und bedarf zu seiner sicheren Auflagerung sechs Stützungsstäbe, etwa in der angegebenen Anordnung, die drei

---

[1]) Vgl. Müller-Breslau, Zentralbl. d. Bauv. 1902, S. 49.

Kurvenlager ersetzt. Nun können in diesem Flechtwerksträger Stabvertauschungen vorgenommen werden: man kann z. B. die drei oberen Diagonalstäbe entfernen und dafür drei Stützungsstäbe mehr einziehen, so daß dann deren neun vorhanden sind (Abb. 98, bei dem der Teil oberhalb der Lager fortgelassen ist). Das so entstandene System hat unbedingt die richtige Anzahl von Stäben und ist aber auch stabil, wie aus folgendem hervorgeht. Zunächst erkennt man (Abb. 97), daß die Knotenpunkte 1, 2, 3 ⋯ oberhalb des Ringes $a, b, c \cdots$ je durch drei Stäbe angeschlossen sind, die nicht in einer Ebene liegen. Sofern also die Punkte $a, b, c \cdots$ in Abb. 98 eine feste Lage besitzen, ist auch der ganze vorliegende Flechtwerksträger stabil. Es ist demnach nur noch die Stabilität des gelagerten Unterrings zu untersuchen. Zu diesem Zwecke genügt es, die Punkte a, c, e zu betrachten, da die weiteren Punkte b, d, k je durch drei Stäbe, zwei Ringstäbe und einen Stützungsstab, an den Ring ace fest angeschlossen sind. Die Stützungsstäbe, in denen das Dreieck ace ruht, können durch Kurvenlager ersetzt werden, deren Gleitrichtung in eine Linie senkrecht zur betreffenden Stützungsebene, also bei regelmäßiger Anordnung in Richtung der Winkelhalbierenden, fällt und in der horizontalen Ebene liegt (Abb. 99).

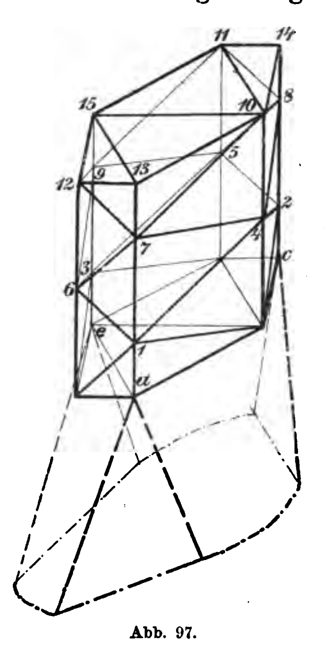


Abb. 97.

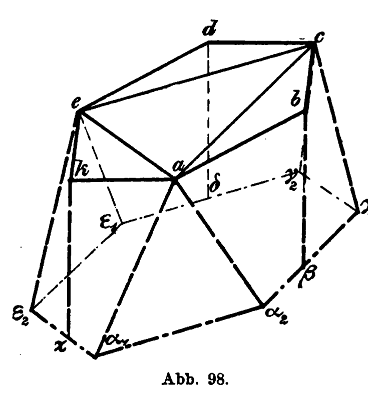


Abb. 98.

Zur Stabilitätsuntersuchung des gestützten Ringes *ace* kann man von den räumlichen Verhältnissen ganz absehen und einfacher betrachten: ob das in dieser Weise in horizontaler Ebene gelagerte Dreieck durch seine Lagerung unverschieblich ist. Labile Systeme werden am ersten bei regelmäßiger Anwendung eintreten, also bei einer Stützung nach Abb. 99.

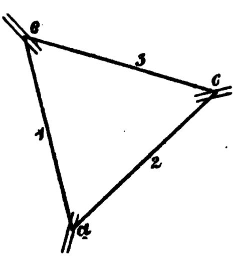


Abb. 99.

71. Derartig gelagerte regelmäßige Polygone (mit Gleitrichtung nach dem Mittelpunkt) spielen bei den Raumfachwerken, besonders bei den Kuppeln, eine große Rolle und darum soll hier gleich die Frage allgemeiner untersucht werden: wann stellt ein in n Kurvenlagern unterstützter n seitiger Ring ein stabiles und wann etwa ein labiles System dar? Es wird sich ergeben: ein regelmäßiges Vieleck, das auf Kurvenlagern gestützt ist, deren Gleitrichtungen nach dem Mittelpunkt laufen, ist stabil, wenn die Seitenzahl ungerade, dagegen labil (mit endlicher Beweglichkeit!), wenn die Seitenzahl eine gerade ist.[1])

Die Richtigkeit dieses Satzes vorausgesetzt, ist demnach gezeigt, daß das Dreieck der Abb. 99 stabil gelagert ist, daß demgemäß auch Abb. 98 ein stabiles System darstellt.

Der Beweis obigen Satzes soll an der Hand eines regelmäßigen Fünfecks und Sechsecks mit der speziellen Kurvenlagerung erbracht werden; er läßt sich durchführen auf statischem oder kinematischem Weg. Zur Anwendung des ersten Verfahrens werden die Kurvenlager durch Stützungsstäbe in der Lagerebene ersetzt; man erhält die in Abb. 100 und 101 angegebenen Systeme, wobei die Stützungsstäbe in den Punkten $\alpha, \beta \cdots$ am Erdfachwerk befestigt zu denken sind. Die richtige Stabzahl für ein statisch bestimmtes gestütztes ebenes System liegt vor, wie man durch Nachzählen ($s = 2n$; $12 = 2 \cdot 6$) erkennt, oder daraus, daß sich beide Systeme durch einmalige

---

[1]) Hacker, Ztschr. f. Bauw. 1888.

Stabvertauschung (*ab* mit einem neuen Stützungsstab *bα*) in solche verwandeln lassen, die nach dem ersten Bildungsgesetz hergestellt sind.

Zum weiteren Nachweis der Stabilität soll geprüft werden, ob beim Fehlen von äußeren Kräften in allen Stäben die Spannung Null eindeutig auftritt, und hierzu angenommen werden, es wirke in irgend einem Stützungsstab, z. B. dem von *a* ausgehenden *aα* eine beliebige Spannung *S*. Dadurch sind die Spannungen in den Stäben *ab* und *ak* bestimmt: dieselben sind gleichgroß, aber entgegengesetzt gerichtet, weil *aα* den Nebenwinkel von *kab* halbiert, und zwar möge bei der hier eingefügten Kraft *S* in *aα* der Stab *ab* den Spannungswert $-P$, dagegen *ak* den Wert $+P$ besitzen. Geht man nun zu Knotenpunkt *b* über, so erkennt man leicht, daß auch *bc* die gleiche Spannung *P* besitzt, und zwar $+P$, da ja wiederum *bβ* den Nebenwinkel von *abc* halbiert. Entsprechendes gilt von den weiteren Knotenpunkten, und man sieht, daß alle Ringstäbe des regelmäßigen Systems dieselbe Größe *P* der Spannung besitzen, aber immer abwechselnd positiv und negativ sind. Liegt nun ein Vieleck mit gerader Seitenzahl vor,

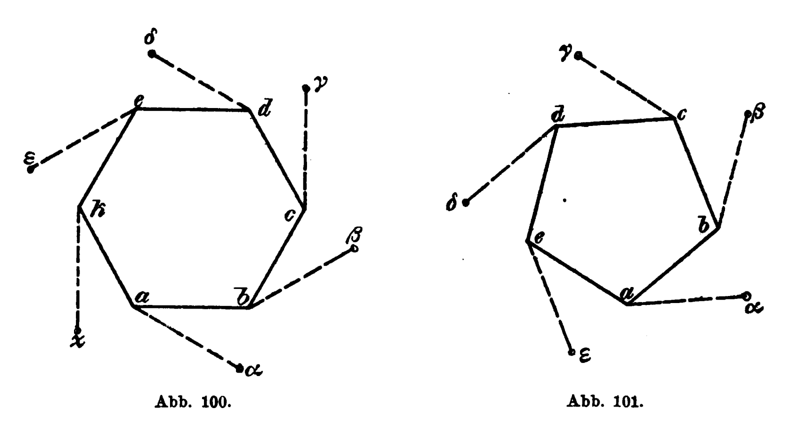


Abb. 100. Abb. 101.

so ergibt der letzte, dem Punkt *a* benachbarte Knotenpunkt *k*, daß in *ka* die Spannung $+P$ herrscht, also dieselbe, die auch Knotenpunkt *a* für *ak* lieferte. Liegt dagegen ein System mit

ungerader Seitenzahl (Abb. 101) vor, so findet sich mittels des letzten Knotenpunktes e im Stab ea der Wert $-P$, also allgemein eine Spannung vom entgegengesetzten Vorzeichen, als wie diejenige, die Knotenpunkt a für denselben Stab ae lieferte. Es hätte also Stab ae als von a ausgehender Stab eine Spannung $+P$, als der von e auslaufende Stab die Spannung $-P$; es muß aber tatsächlich im ganzen Stab die gleiche Spannung herrschen, demgemäß muß P die Größe Null haben, also die durch willkürliche Spannung S in $a\alpha$ im Stab ak bewirkte Spannung P liefert kein mögliches Spannungsbild, es ergibt sich vielmehr, daß $P = 0$ sein muß und damit auch S und alle übrigen Spannungen. Hiermit ist gezeigt, daß beim regelmäßigen Vieleck mit ungerader Seitenzahl beim Fehlen von äußeren Kräften in allen Stäben die Spannung Null eindeutig auftritt, daß also dieses System stabil ist.

Anders liegen die Verhältnisse beim regelmäßigen Vieleck mit gerader Seitenzahl; der Stab ak erhält sowohl an Knotenpunkt a, wie k die gleiche Spannung $+P$; das drückt aus: wie man auch die im betrachteten Stützungsstab $a\alpha$ eingeführte willkürliche Spannung S wählen mag, immer ergibt sich ein

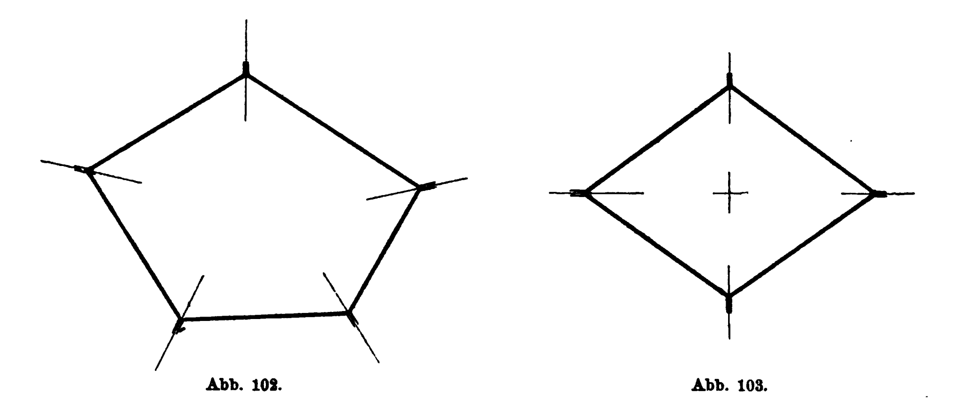


Abb. 102. Abb. 103.

mögliches Spannungsbild. Es ist also keineswegs nötig, daß beim Fehlen der äußeren Kräfte in den Stäben die Spannung Null herrscht, es gibt vielmehr beliebig viele Spannungsbilder.

Demnach ist dieses System (Abb. 100) nicht mehr statisch bestimmt, also auch nicht stabil. Es wird dies aber sofort, wenn ein Stützungsstab eine andere Lage einnimmt, wenn also ein Kurvenlager nicht mehr nach dem Mittelpunkt gerichtet ist. Und aus dieser Betrachtung geht dann auch ohne weiteres hervor, daß jedes unregelmäßige Vieleck bei einer Stützung auf Kurvenlagern in allen Knotenpunkten immer stabil ist, wenn nicht gerade beim Ring mit gerader Seitenzahl alle Gleitrichtungen den Winkel zwischen den am betr. Kurvenlager zusammenstoßenden zwei Stäben halbieren. So ist z. B. der in Abb. 102 dargestellte Ring stabil, dagegen labil das Stabviereck nach Abb. 103. Ein regelmäßiges Vieleck besitzt im übrigen noch unendlich kleine Beweglichkeit, wenn die Gleitrichtungen der Kurvenlager in die Kreistangenten fallen.[1])

72. Daß die in Abb. 98 verwendete Verteilung der neun Stützungsstäbe nicht die einzige Möglichkeit darstellt, einen stabilen Träger aus dem betrachteten Stabsystem zu gewinnen, läßt sich erwarten. So gibt z. B. die Anordnung nach Abb. 104 eine stabile Stützung an, wobei ein Punkt a auf einem festen Lager ruht, einer auf einem Kurvenlager (k) und die vier anderen in Kugellagern. Die Berechnung dieses Systems erscheint einfacher, da hier je ein Punkt durch drei Stäbe angeschlossen ist: a, k, e, c, d, b. Die Lageranordnung der Abb. 98 hat aber gegenüber derjenigen von Abb. 104 Vorteile: man denke sich das obere Gerüstsystem gestützt auf einer zylindrischen Mauer; dann treten bei Abb. 98 infolge der Rollenlager senkrechte Drucke, sowie solche in Richtung der Kreistangente auf, aber keine in radialer Richtung, die das Mauerwerk umzustoßen suchen würden;

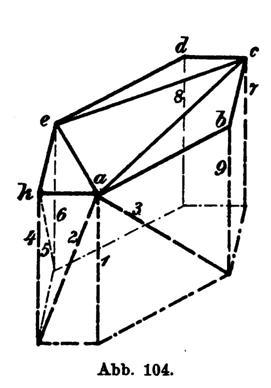


Abb. 104.

[1]) Müller-Breslau, Zentralbl. d. Bauv., 1892, S. 202.

dagegen bei Anordnung nach Abb. 104 entstehen durch das feste Lager unbedingt auch Lagerdrücke in radialer Richtung

73. Man kann gegenüber diesen Systemen noch einen Schritt weiter gehen und auch die unteren Diagonalstäbe *ac*, *ce*, *ea* fortnehmen und dafür drei neue Stützungsstäbe einziehen, so daß deren zwölf vorliegen. Da die über dem Ring *a*, *b* ⋯ (Abb. 97) gelegenen Knotenpunkte sicher starr (nach dem ersten Bildungsgesetz) angeschlossen sind, so ist auch hier nur zu untersuchen, in welcher Weise der Ring ohne Diagonalen gelagert werden kann. Vor allem dürfen bei einem regelmäßigen Sechseck die Stäbe nicht so verteilt sein, daß jeder Punkt auf einem nach dem Mittelpunkt gleitenden Rollenlager gestützt ist, da nach obigen Ausführungen ein regelmäßiges Vieleck mit gerader Seitenzahl nicht in dieser Weise gelagert werden darf. Wohl kann aber der Ring in anderer Weise auf Kurvenlagern gestützt werden, z. B. nach Anordnung der Abb. 105, wobei die Gleitrichtungen der Kurvenlager senkrecht zu den betreffenden Ringstäben verlaufen. Die Stützungsstäbe können am einfachsten so angeordnet werden, daß der eine jedesmal senkrecht, der andere wagrecht gerichtet ist: bei *a* in Richtung *ka* usw., so daß die beiden Stützungsstäbe in die Richtung der gewöhnlichen Reaktionskomponenten fallen.

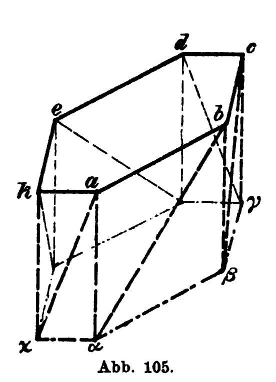


Abb. 105.

Daß diese Anordnung (Abb. 105) stabil ist, erkennt man wiederum am einfachsten, indem man nachsieht, ob beim Fehlen von äußeren Kräften in allen Stäben eindeutig die Spannung Null herrscht. An Knotenpunkt *a* kann man die wirkende Kraft 0 zerlegen in die Richtung *ab* und die Ebene *akax*; daraus folgt sofort, daß in *ab* die Spannung Null wirkt; ebenso ergibt Knotenpunkt *b* für den Stab *bc* die Spannung Null, dann *c* für den Stab *cd*, weiter *d* für *de*, *e* für *ek* und *k* für *ka*. Jetzt sind an Knotenpunkt *a* nur noch zwei Stäbe,

nämlich Stützungsstäbe, als Unbekannte vorhanden; wirkende Kräfte treten nur solche von der Größe Null auf, also haben die beiden Stäbe $a\alpha$ und $a\varkappa$ auch die Spannung Null. Entsprechendes findet sich bei b: die Stabkräfte $b\beta$ und $\beta\alpha$ sind gleich Null und des weiteren ergibt sich an den anderen Punkten für alle Stützungsstäbe eindeutig die Spannung Null. Damit ist die Stabilität eines Systems mit Stützung nach Abb. 105, bei dem die oberen Punkte nach dem ersten Gesetz angeschlossen sind, bewiesen.

Es ist selbstverständlich, daß man die zwölf (allgemein $2n$) Stützungsstäbe auch in anderer Weise verteilen kann; man kann z. B. (Abb. 106) das Lager a fest anordnen, also durch drei Stützungsstäbe festlegen, dafür einen Punkt b nur durch ein Kugellager, die übrigen mittels Kurvenlager stützen. Ein solches System ist sicher stabil, da es nach einem einfachen Bildungsgesetz hergestellt ist: a liegt fest, dann ist k durch drei nicht in einer Ebene liegende Stäbe angeschlossen, weiter e, d, c, b. Man erkennt übrigens aus dieser Anordnung sofort, daß auch die Stützung nach Abb. 105 einen stabilen Träger liefert, denn beide sind nur dadurch unterschieden, daß die Diagonale $a\beta$ mit $b\alpha$ vertauscht ist; jede der Diagonalen hat aber nur den Zweck, das ebene Viereck $ab\beta\alpha$ stabil zu gestalten, und es ist demgemäß ganz einerlei, ob die Diagonale $a\beta$ oder aber $b\alpha$ eingezogen wird.

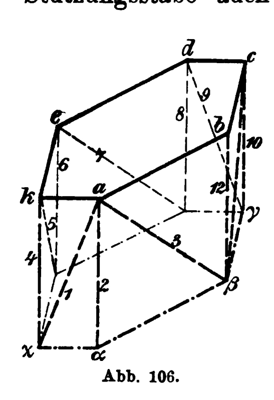


Abb. 106.

§ 22. Berechnung von Prismengerüstsystemen.

74. Die Berechnung der Gerüstsysteme ist durch die vorgenannten Stabilitätsuntersuchungen im wesentlichen mitgegeben, indem an die Stelle der Belastung Null ein maßgebender Belastungszustand einzuführen ist; doch bietet ein näheres Eingehen auf die Spannungsuntersuchungen manche Erleichterung.

Das Wesentliche bei den betrachteten Systemen ist, daß an die in irgend einer Weise festgelegten Punkte des unteren Rings die weiteren in der Weise angeschlossen sind, daß die ebenen Begrenzungsflächen ebene bestimmte Fachwerke bilden und auf den Kanten gemeinsame Knotenpunkte besitzen. Wohl sind in dem bis jetzt betrachteten Gerüstsystem die oberen Punkte alle nach dem ersten Bildungsgesetz angeschlossen, doch ist dies nicht für die Stabilität erforderlich; denn innerhalb der ebenen Begrenzungsträger können immer noch Stabveränderungen vorgenommen werden, wenn nur dadurch die feste Lage der Wandknotenpunkte, die je zwei benachbarten Ebenen angehören, nicht aufgehoben wird.

Die Berechnung der Spannungen in allen Stäben oberhalb der Lagerrings läßt sich nun in einfacher Weise nach folgender Regel durchführen:[1])

Man zerlegt jede Kraft in drei Komponenten, von denen die eine in Richtung des betreffenden Kantenstabs fällt, während die beiden anderen sich in den anliegenden Ebenen befinden und horizontal verlaufen; dann faßt man jede Wand für sich als ebenen Träger auf, auf den in den einzelnen Punkten als Kräfte die eine Horizontalkomponente und die halbe Kantenkomponente wirken. Die wirklichen Spannungen in den Kantenstäben sind bestimmt durch die Summe derjenigen, die sich in ihnen aus den beiden benachbarten Ebenen ergeben, während die Spannungen der Füllungsstäbe mit den in den einzelnen ebenen Fachwerken gefundenen Werten übereinstimmen.

Daß diese Regel richtig ist, ergibt sich leicht aus Betrachtung des Systems Abb. 97, bei dem aber nun die drei oberen Diagonalstäbe durch Stützungsstäbe ersetzt sein mögen. Man betrachte zunächst einen der drei oberen Knotenpunkte, etwa 13, an dem eine beliebige Kraft wirken soll; dieselbe muß

[1]) Vgl. z. B. Föppl, D. Fachw. i. R., S. 78. — Förster, D. Eisenkonstr. d. Ing. Hochbauten, Leipzig 1902, S. 439. — Müller-Breslau, D. n. Meth. d. Fest., 3. Aufl., S. 282.

Gleichgewicht halten mit den Spannungen der drei daselbst zusammentreffenden Stäbe, also einer Kraft in der linken Ebene, einer in der rechten und einer in der Kante. Dasselbe gilt von den Knotenpunkten 14, 15. Dann gehe man über zu den Knotenpunkten 12, 11, 10; an 10 z. B. wirken als bekannte Kräfte P_{10}, sowie die Spannungen in 10, 13 und 10, 14. Die Resultante dieser drei Kräfte hat wiederum Gleichgewicht zu halten mit den Spannungen in den beiden Stäben in den benachbarten Ebenen 7, 10 und 8, 10, sowie dem betreffenden Kantenstab 10, 4. Man zerlegt die Kraft P_{10} in drei Komponenten: W_l in Richtung von 10, 13, W_r in 10, 14 und K in 10, 4; erstere Komponente kann in 10, 8 keine Spannung hervorrufen, da sie in die Ebene (10, 13, 7, 4) fällt, sie wird aber zusammen mit Spannung 13, 10 in 10, 7 und 10, 4 Spannungen erzeugen; die Komponente W_r ruft in 10, 7 die Spannung Null hervor, zusammen mit 10, 14 aber eine Kraft in 10, 8 und 10, 4; die Komponente K von P_{10} schließlich erzeugt in 10, 4 eine Spannung, aber in 10, 7 und 10, 8 keine solche. Wenn man die Verhältnisse an den verschiedenen Knotenpunkten weiter verfolgt, erkennt man, daß man zweckmäßig jede äußere Kraft in drei Komponenten W_l, W_r und K zerlegt; stets wirken dann die W_l nur auf Stäbe der links anschließenden Wand inkl. der Kantenstäbe, die Kräfte W_r auf die rechts angrenzende Wand, wiederum inkl. der Kantenstäbe, und die Komponenten K erzeugen überhaupt nur Spannungen in den Kantenstäben. Ausgehend von den oberen Knotenpunkten ergibt sich aus dieser Überlegung, daß die Spannungen in den Stäben des Fachwerks über dem Lagerring dieselbe Größe erhalten, als ob einzelne ebene Fachwerke vorlägen, auf die die Kräfte W_l, W_r, K wirken, wobei aber darauf zu achten ist, daß jeder Kantenstab zwei benachbarten ebenen Fachwerken angehört, die Spannung eines solchen also eine Summe ist von derjenigen der linken Wand etwa infolge W_r und K, der rechten Wand (als linke Begrenzung) infolge W_l ohne K. Hiermit ist denn die Richtigkeit der oben angeführten Regel bewiesen, und man erkennt, daß es auch tatsächlich einerlei ist, wie die Stäbe in den

Fachwerkswänden angeordnet sind, solange sie nur stabile ebene Fachwerke darstellen, die auf den Kanten gemeinsame Knotenpunkte besitzen.

75. Mittels dieser Regel lassen sich zunächst die Spannungen aller Stäbe oberhalb des Lagerrings ermitteln; für diejenigen der Lagerstäbe und Stützungsstäbe ist eine weitere Überlegung nötig. Am einfachsten gestaltet sich diese bei der Anordnung nach Abb. 106. Hier bildet ja das Stützungsgeschoß eine direkte Fortsetzung des oberen Fachwerks, indem die Stützungsstäbe in den gleichen Ebenen angeordnet sind, wie die oberen Fachwerkswände. Jede solche Wand stellt mit den Stützungsstäben ihrer Ebene für sich einen statisch bestimmten ebenen Fachwerksträger (Abb. 107) dar, der auch als solcher zu berechnen ist. Man wird demgemäß auch in den Lagerringpunkten die wirkende Kraft P in drei Komponenten W_l, W_r, K zerlegen und bedenken, daß W_l nur auf die links von K gelegene Wand des Stützungsgeschosses wirkt, W_r auf die rechte, daß aber der lotrechte Stützungsstab sowohl der linken, wie der rechten Wand angehört.

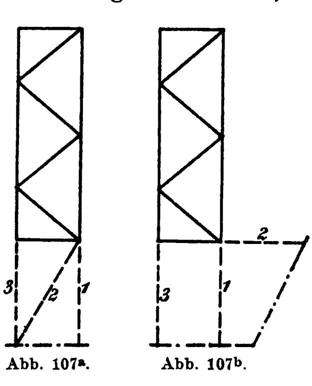


Abb. 107a. Abb. 107b.

Man kann auch in den einzelnen ebenen Fachwerksträgern die Stützungsstäbe anders anordnen, ohne irgend etwas zu ändern, indem die drei nur der Bedingung unterworfen sind, daß sie in derselben Ebene liegen und zwei von einem Punkt ausgehen; so ist z. B. die Anordnung in Abb. 107b für das gestützte Raumsystem gleichbedeutend mit der oben angegebenen. Dann stellt die Spannung in 1, die infolge der beiden benachbarten Felder auftritt, die lotrechte Lagerreaktion an dieser Stelle dar, diejenige in 3 infolge der benachbarten Felder die lotrechte Reaktion an diesem Punkt und die Spannung in 2 die wagerechte Reaktion, die in Richtung des Lagerstabes fällt.

Man erkennt auch, wie man bei derartigen Raumsystemen die Lagerreaktionen ermitteln kann, ohne die Spannungen der Stäbe zu kennen, indem man jede Wand als ebenes gestütztes Fachwerk betrachtet und nun die Lagerreaktionen bezw. Spannungen der Stützungsstäbe auf Grund eines der bekannten Verfahren (Schnittmethode) ermittelt.

In Abb. 108 (s. Tafel I) ist die Ermittlung der Spannungen und Lagerreaktionen in einem derartig gelagerten Gerüst vollständig durchgeführt unter der Voraussetzung einer Belastung durch horizontale Kräfte Diese wurden jedesmal in zwei horizontale Komponenten in Richtung der benachbarten Ringe zerlegt und dann die einzelnen Wände als ebene Fachwerke betrachtet, auf die diese Komponenten in den oberen Punkten wirken. Zum besseren Verständnis sind die Wände einzeln aufgezeichnet und die zugehörigen Kräftepläne mit entsprechenden Ziffern bezeichnet. Die Größen H und V geben die auf die ebenen Träger wirkenden horizontalen und vertikalen Lagerreaktionen an. Erstere Werte, sowie die Spannungen der Füllungsstäbe sind auch die im Raumsystem auftretenden, dagegen ist für die Kantenstäbe und die V zu beachten, daß sie je zwei benachbarten Wänden angehören, die wirklichen Kräfte also durch algebraische Addition erhalten werden.

Die Spannungsberechnung eines nach Abb. 98 gelagerten Systems bedarf einer weiteren Überlegung, soweit es sich um die Spannungen der Lagerring- und Stützungsstäbe handelt. Die Spannungen in den von b, d, k ausgehenden Stäben finden sich sofort, indem man die daselbst wirkende Kraft (äußere Last und Spannungen der daselbst zusammentreffenden Stäbe des oberen Teiles) in die drei unbekannten Stabkräfte zerlegt, bezw. ihre Spannungen mit der gegebenen Kraft in Gleichgewicht setzt. Es bleibt demgemäß nur noch das in Abb. 109 dargestellte System[1]) zu untersuchen. An demselben wirken wiederum an den einzelnen Punkten als Kräfte die etwaige Last und die

[1]) Der Allgemeinheit wegen wurde ein unregelmäßiges Dreieck eingeführt.

Spannungen der daselbst vom gestrichenen System zusammentreffenden Stäbe. Zwischen diesen Kräften und den in den verschiedenen Punkten noch unbekannten Stabspannungen ist Gleichgewicht herzustellen. Die Aufgabe ist erledigt, sobald gezeigt, wie die durch eine beliebige Einzellast hervorgerufenen Spannungen dieses Systems zu berechnen sind. Es mögen z. B. in a eine beliebig gerichtete Kraft P von irgendwelcher Größe wirken, in c und e keine Kräfte.

An Knotenpunkt c, an welchem keine Kraft angreift, muß die Resultante von 1 und 2 mit derjenigen der beiden Stützungsstäbe gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet sein, da nur dann die vier Spannungen ohne äußere Kräfte im Gleichgewicht stehen. Jede dieser Resultanten muß demnach in die Schnittlinie der Ebene (1, 2) und der Ebene der Stützungsstäbe fallen, also in eine Gerade $\overline{\text{I, I}}$, die bei der hier angenommenen Anordnung parallel zu 3 verläuft. Ebenso ist die Resultante von 2 und 3, wie auch diejenige der beiden in e zusammentreffenden Stützungsstäbe in einer Geraden II, II gelegen, die durch die Schnittlinie der Ebene (2, 3) mit der betreffenden Stützungsebene gegeben ist, also in einer Geraden parallel

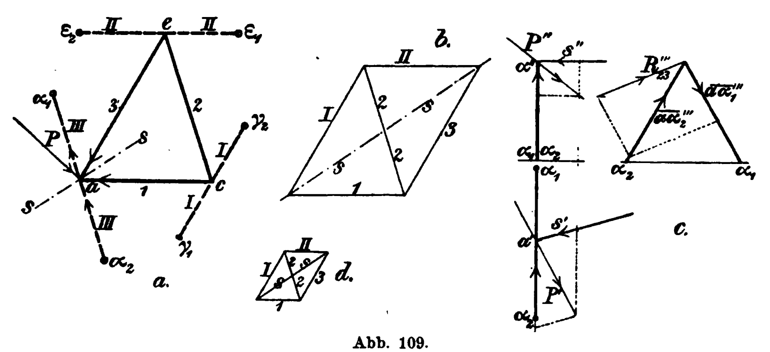


Abb. 109.

zu 1. Am Knotenpunkt a liegen die Verhältnisse anders, da hier noch eine äußere Kraft wirkt. Wäre die Richtung der Resultanten von 1 und 3 bekannt,[1]) so wäre die Spannungs-

[1]) Beim regelmäßigen Dreieck fällt sie in Richtung der Winkelhalbierenden von *cae*.

ermittlung durchzuführen, indem Gleichgewicht zwischen der äußeren Kraft P, den Kräften in den beiden Stützungsstäben und einer Kraft in Richtung der Resultante von 1 und 3 herzustellen wäre; die Spannungen in 1 und 3 würden sich schließlich durch eine Zerlegung der Resultante in diese beiden Richtungen ergeben. Dann fände man an c die Spannungen in 2 und den beiden Stützungsstäben und schließlich an e die Spannungen der noch fehlenden Stäbe.

Das Wesentliche der Aufgabe liegt also darin, die Richtung der Resultante von 1 und 3 zu finden.[1]) Zu diesem Zweck nehme man in 1 eine ganz beliebige Spannung an, stelle zwischen dieser und einer Kraft in Richtung I, I (Resultante von den beiden Stützungsstäben) und in Richtung 2 Gleichgewicht her, mittels eines Kräftepolygons, Abb. 109[b]. Mit der so ermittelten Spannung 2 bestimmt man die Kräfte in Richtung II, II und Stab 3. Man betrachtet nun die Verhältnisse an Knotenpunkt a; wohl sind daselbst noch vier unbekannte Spannungen vorhanden; aber dadurch, daß man mit einer beliebigen Spannung in 1 vorwärts gegangen ist, kennt man das Verhältnis der Spannungen in 1 und 3; denn wie nun auch der wahre Wert von 1 ist, stets wird das Verhältnis von 3 zu 1 unverändert bleiben. Man kann sagen: der Maßstab für die wirklichen Spannungen in 1 und 3 ist noch nicht bekannt, wohl aber sind beide in demselben Maßstab gefunden. Wenn man hiernach die Spannung in 1 und 3 zusammensetzt, so erhält man sicher die richtige Lage der Resultante von 1 und 3: sie ist gegeben durch die Parallele zu ss, die durch Punkt a (Abb. 109[a]) gezogen wird. Damit ist denn die ganze Aufgabe auf die gewöhnliche Kräftezerlegung zurückgeführt: an Knotenpunkt a muß P_a Gleichgewicht halten mit Kraft in Richtung ss und der Spannung in den beiden daselbst einlaufenden Stützungsstäben (Abb. 109[c]), wodurch die Kraft in ss und die letzteren Spannungen bestimmt sind. Durch Zerlegung der

---

[1]) Vgl. zu dieser Berechnung die von Föppl herrührenden Ausführungen in § 28.

Kraft in *ss* finden sich die Spannungen in 1 und 3 usw. (Abb. 109[d]).[1])

Wirken außer der Kraft in *a* noch andere Lasten, so sind die Spannungen der verschiedenen Stäbe für je eine Einzellast zu ermitteln und dann die Spannungen für die verschiedenen Belastungsfälle zu addieren.

Für Vertikalkräfte gestaltet sich bei der in Abb. 98 dargestellten Systemanordnung die Spannungsermittlung besonders einfach: Eine in *a* wirkende Vertikalkraft *V* ist nach obigem zu zerlegen in eine gewisse Richtung *ss* in der Horizontalebene und zwei Stützungsstäbe in einer vertikalen Ebene; da nun *V* senkrecht zu *ss* wirkt, also in der Ebene der Stützungsstäbe liegt, ist die Kraft in *ss* gleich Null; die ganze Kraft *V* wird von den Stützungsstäben aufgenommen, während die Stäbe 1 und 3 die Spannung Null besitzen. Entsprechend liegen die Verhältnisse an den anderen Knotenpunkten: der Lagerring erhält bei nur vertikalen Kräften überhaupt keine Spannungen, sondern nur die Stützungsstäbe.

Wenn auf das ganze Gerüstsystem nur vertikale Kräfte wirken, so ergibt sich zunächst aus Betrachtung der ebenen Fachwerke oberhalb des Lagerrings, daß nur in den Kantenstäben Spannungen auftreten, und zwar sind — falls nur in den obersten Punkten vertikale Lasten wirken — alle Stabspannungen eines Grates einander gleich, nämlich gleich der oben angreifenden vertikalen Kraft. Es wirken demgemäß in den Knotenpunkten des Lagerrings bei diesem Belastungsfall nur vertikale Kräfte, und es treten bei einer Stützungsanordnung nach Abb. 98 oder 105 im Lagerring überhaupt keine Spannungen auf, sondern es werden die vertikalen Kräfte, die oben wirken, durch die Kantenstäbe direkt in die Stützungsstäbe übergeleitet, und zwar entstehen nur vertikale Auflagerreaktionen.

---

[1]) In Abb. *c* ist der Knotenpunkt *a* gegenüber Abb. *a* gedreht, so daß sich $a\alpha_1$ und $a\alpha_2$ im Aufriß decken. In Abb. *d* ist mit Rücksicht auf die Deutlichkeit doppelter Maßstab gegen Abb. *c* gewählt; erstere Abbildung wäre überhaupt nicht nötig gewesen, da sie ja von Abb. *b* sich nur durch das Maßverhältnis unterscheidet.

§ 23. Pfeilergerüste und Krangerüste.

76. Die im vorigen Paragraphen betrachteten Systeme zeichneten sich dadurch aus, daß die einzelnen Fachwerkswände lotrechte Lage besaßen; es ist dies eine Form, die bei Führungsgerüsten für Gasbehälter üblich ist. In ganz ähnlicher Weise werden nun solche Raumfachwerke zu berechnen sein, die auch wieder von einzelnen Fachwerkswänden begrenzt sind, aber nicht mehr die spezielle Anordnung besitzen, bei denen z. B. das Raumfachwerk eine Pyramide oder den Teil einer solchen darstellt. Letztere Gestalt ist eigentümlich den eisernen Pfeilern.[1]) Die Lageranordnungen können wiederum in der verschiedensten Weise erfolgen entsprechend den obigen Ausführungen.

Sind im oberen und unteren Felde sämtliche Diagonalen eingezogen, so sind zur sicheren Stützung sechs Auflagerstäbe nötig, die sich in allgemeiner Lage befinden. Bei einem vierseitigen Pfeiler, die ja im wesentlichen in Betracht kommen, ist es nicht möglich, diese sechs Stützungsstäbe in den vier Punkten so zu verteilen, daß sie einer Lagerung auf horizontaler Fläche entsprechen. Beim Fehlen der Diagonalen in beiden Grundflächen sind wiederum, wie bei den besprochenen Gerüsten, $2n$ Stützungsstäbe nötig. So stellt z. B. Abb. 110 ein stabiles System dar.

Man erkennt allgemein, daß bei einem $n$seitigen Pfeiler, der auf $2n$ Stützungsstäben, bezw. auf Lagern, die diesen Stäben entsprechen, ruht, horizontale Versteifungen überflüssig sind, daß diese den räumlichen Fachwerksträger statisch unbestimmt machen.

Die Berechnung der statisch bestimmten Pfeilergerüste erfolgt im wesentlichen geradeso, wie diejenige der Prismengerüste in § 22.[2]) Man zerlegt an jedem Knotenpunkt i die daselbst wirkende Kraft in drei Komponenten, von denen die eine in Richtung des Grates K_i, die beiden anderen in eine horizontale Ebene fallen, die eine in die Wand links, die andere

[1]) Vgl. Föppl, D. Fachw. i. R., S. 78.

[2]) Vgl. hierzu: Müller-Breslau, D. n. Meth. d. Fest., S. 282.

in die Wand rechts, ${}_lW_i$, ${}_rW_i$, und faßt jede Fachwerkswand als ebenen Fachwerksträger auf, wobei zu beachten ist, daß die Gratstäbe zwei benachbarten Wänden angehören.

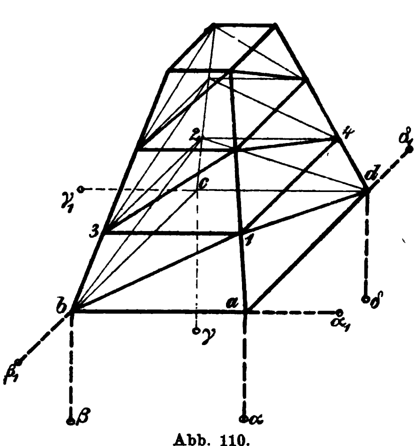


Abb. 110.

Mittels dieser Erwägung findet man die Spannungen in allen Stäben **oberhalb** des Lagerrings; nachdem aber diese ermittelt, bereitet die Bestimmung der Spannungen im gestützten Lagerring keine Schwierigkeiten mehr. Ist jeder Punkt auf zwei Stützungsstäben gelagert, so ordnet man diese am besten entsprechend der üblichen Richtung der Lagerkomponenten an, also bei der Stützung nach Abb. 110 je einen Stützungsstab horizontal und je einen vertikal. Man zerlegt in jedem Lagerpunkt die daselbst wirkenden Kräfte, nämlich äußere Kraft und Spannungen der daselbst zusammentreffenden Stäbe, in drei Komponenten, von denen eine in die senkrechte Richtung, die zwei anderen horizontal in Richtung der einlaufenden Ringstäbe fallen. An Punkt b z. B., an dem die Spannungen $b1$, $b2$, $b3$ und die Kraft P_b wirken, spaltet man zunächst die Spannung $b1$ in der Ebene $a13b$ in zwei Komponenten in Richtung $b3$ (${}_rG_b$) und ba (${}_rF_b$); ebenso $b2$ in $b3$ (${}_lG_b$) und bc (${}_lF_b$) und dann ${}_rG_b + {}_lG_b$ zusammen mit Spannung $b3$ in eine vertikale Komponente V_b (aufwärts) und eine horizontale W_b, so daß:

$$V_b = ({}_lG_b + {}_rG_b + b3) \cdot \sin\varphi, \quad W_b = ({}_lG_b + {}_rG_b + b3) \cdot \cos\varphi,$$

wenn φ der Winkel zwischen Grat und Horizont ist. Die so erhaltene Komponente W_b wird wiederum in zwei Komponenten in Richtung von ba und bc zerlegt. Unter Voraussetzung des rechteckigen Ringes ist:

$${}_rH_b = W_b \cdot \cos\alpha, \quad {}_lH_b = W_b \cdot \sin\alpha.$$

Wenn nun weiter P_b die Komponenten V_b', ${}_rH_b'$, ${}_lH_b'$ besitzt, so sind die im ganzen auftretenden Kraftkomponenten:

$$\begin{aligned} \text{vertikal:}\quad & V_b + V_b' \equiv K_b, \\ \text{horizontal rechts:}\quad & {}_rF_b + {}_rH_b + {}_rH_b' \equiv R_b, \\ \text{horizontal links:}\quad & {}_lF_b + {}_lH_b + {}_lH_b' \equiv L_b. \end{aligned}$$

Die Spannungen der Ring- und Stützungsstäbe sind damit sofort zu finden, denn es ist jetzt nur noch der gestützte Lagerring zu betrachten, auf den die angegebenen Kräfte wirken. Nun haben die bei einem Punkt, z. B. b, zusammentreffenden Stäbe die spezielle Lage, daß sie mit Ausnahme eines einzigen (ba) in einer Ebene sich befinden; da nun von den äußeren Kräften K_b und L_b ebenfalls in dieser Ebene liegen, dagegen R_b in der Richtung des betreffenden Stabes ba, so ist diese Spannung sofort gegeben:

$$ba + R_b = 0.$$

Entsprechend ist an den anderen Knotenpunkten zu verfahren und man erhält:

$$\begin{aligned} cb + R_c &= 0, \\ dc + R_d &= 0, \\ ad + R_a &= 0. \end{aligned}$$

Nachdem in dieser Art die Spannungen der Ringstäbe ermittelt sind, treten an jedem Knotenpunkt a, b, c, d nur noch zwei unbekannte Stabkräfte auf, und man findet z. B. $a\alpha$ und $a\alpha_1$, indem man die Kräfte K_a, L_a und Spannung in ab, die ja in derselben Ebene wirken, in Gleichgewicht setzt mit diesen Spannungen, also z. B. ein ebenes Kräfteparallelogramm zeichnet. Sind die Stützungsstäbe nach Abb. 110 angeordnet, so ergibt sich sofort:

$$\begin{aligned} & -a\alpha + K_a = 0, \\ & -a\alpha_1 + L_a + ba = -a\alpha_1 + L_a - R_b = 0, \\ & -b\beta + K_b = 0, \\ & -b\beta_1 + L_b + bc = -b\beta_1 + L_b - R_c = 0 \end{aligned}$$

usw.,

wenn bei den Spannungen der Stützungsstäbe, übereinstimmend mit der üblichen Einführung der Spannungen, die Richtung von dem Knotenpunkt fort als positiv angesehen wird.

Es ist hiernach die Aufgabe gelöst, oder wenigstens auf eine solche der ebenen Systeme zurückgeführt, wenn man die äußeren Kräfte in jedem Punkte so zerlegt, daß die eine Komponente in Richtung des Grates, die beiden anderen in die benachbarten Flächen fallen. Die Momentenmethode kann zur vorliegenden Berechnung natürlich auch mit Vorteil angewendet werden. Will man z. B. *ad* erhalten, so betrachte man Knotenpunkt *a* und stelle das Moment aller Kräfte für eine Achse in $ab\beta\alpha$, etwa $\beta\alpha$, auf usw.

77. Als weitere Anwendung derartiger gestützter Flechtwerkssysteme können die Krangerüste gelten, wenn dieselben gegen die verschiedenartigsten Kräfte Sicherheit bieten sollen und demgemäß als Raumfachwerke ausgebildet werden müssen.[1]) Der Gedanke liegt nahe, ein Flechtwerk mit möglichst wenig Seitenflächen, also ein dreiseitiges, zu benützen. Man könnte ein größeres System etwa nach Abb. 111 herstellen, bei dem der untere Teil des Gerüstes ein prismatisches Gebilde darstellt, das sicher statisch bestimmt ist, während im oberen Teil je ein Punkt durch drei Stäbe bezw. nach Abb. 68 angefügt ist.

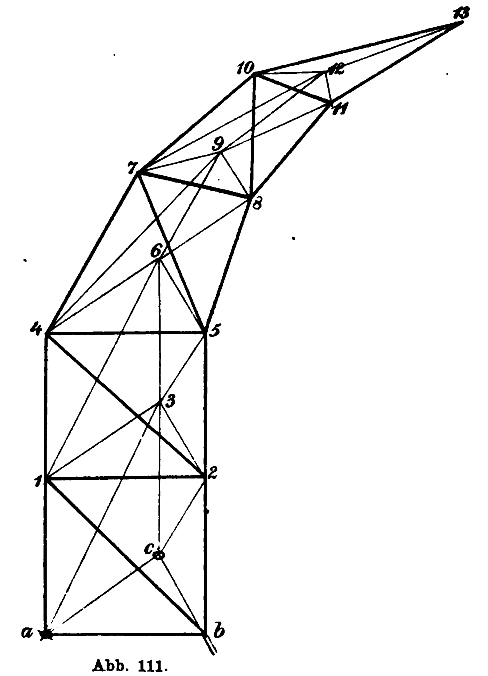


Abb. 111.

Die Spannungsermittlung ist einfach durchzuführen, indem man zunächst von

[1]) Vgl. Föppl, D. graph. Statik, 2. Aufl., S. 309.

Punkt 13 ausgeht und nacheinander die Knotenpunkte 12, 11 ⋯ 7 betrachtet, bei denen jedesmal drei der vier zusammentreffenden unbekannten Stabkräfte in einer Ebene liegen, also die vierte sofort bestimmt werden kann. Der untere Teil ist schließlich wie die seither betrachteten Gerüstsysteme zu behandeln.

Die Durchführung der Aufgabe gestaltet sich am einfachsten, wenn auch im oberen Teil die Stäbe in drei Ebenen angeordnet sind: man wird dann in jedem Knotenpunkt die wirkende Kraft in zwei Komponenten in den benachbarten Seitenflächen und in eine dritte Komponente im Grat zerlegen, jede Ebene in wahren Maßverhältnissen aufzeichnen und die Spannungsermittlung im ebenen Fachwerk vornehmen, wobei wieder zu berücksichtigen ist, daß jeder Gratstab zwei benachbarten Ebenen angehört, also die sich aus beiden Ebenen ergebenden Spannungen zusammenzuzählen sind.

Zweiter Abschnitt.

Dachfachwerke.

---

78. Als wirkliche Raumfachwerke werden heutzutage am meisten die Kuppeln ausgeführt, während andere Raumgebilde, wie Brücken, Dächer usw., aufgefaßt werden als aus einzelnen ebenen Fachwerken zusammengesetzt. Die Dachsysteme entstehen bei der gewöhnlichen Ausführung in der Weise, daß man die einzelnen ebenen Dachbinder aufstellt und diese dann durch Pfetten und Längsverstrebung miteinander verbindet. Auch die Kuppeln können in ähnlicher Weise aus einzelnen ebenen Bindern als Hauptkonstruktionen hergestellt werden,[1]) jedoch werden sie gewöhnlich als Raumfachwerke ausgeführt und berechnet. In entsprechender Art kann aber auch irgend ein Dachsystem als Raumfachwerk behandelt werden, und es soll deshalb in diesem Abschnitt nicht nur auf Kuppeln, sondern auf ganz verschiedenartige Dachfachwerke eingegangen werden.

Zuerst wurde auf Raumfachwerke für Dächer von Föppl[2]) hingewiesen, der die Flechtwerksdächer ersann. Trotz ihrer offenkundigen Vorzüge und bequemen Berechnung sind dieselben nur vereinzelt ausgeführt worden.

Um die Ausführungen des vorliegenden Abschnitts zu erleichtern, soll zunächst auf die bekannten Kuppeln eingegangen und das Wesen derselben beleuchtet werden, um hierauf all-

---

[1]) Förster, Eisenk. d. Ing. Hochb., 3. Aufl., Leipzig 1906, Kap. XI.

[2]) Föppl, D. Fachw. i. R.

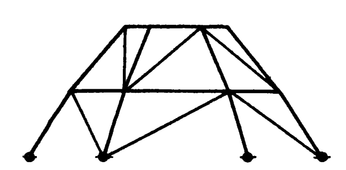
gemeine Grundregeln und Sätze zur Herstellung und Stabilitätsuntersuchungen neuer Kuppeln zu geben, und dann schließlich andere Dachfachwerke durchzunehmen.

Fünftes Kapitel.

Die Schwedler-Kuppel.

§ 24. Die Form der Schwedler-Kuppel. Verschiedene Lagerungen.

79. Wenn irgend ein Raum mittels einer Eisenkonstruktion in Form einer Umdrehungsfläche, z. B. eines Kugelabschnitts, überdeckt werden soll, liegt der Gedanke am nächsten, die Stabanordnung nach Meridianen und Parallelkreisen herzustellen, und im übrigen die Stäbe so zu verteilen, daß das entstehende Stabsystem nach dem ersten Bildungsgesetz aufgebaut ist.



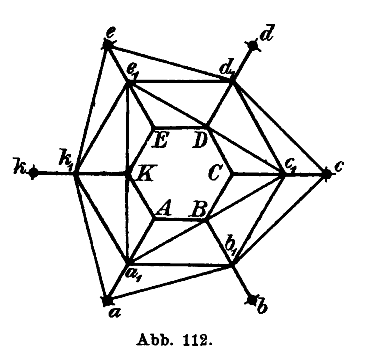


Abb. 112.

Durch Parallelkreise und Meridiane wird der Überdeckungsmantel in viereckige Felder geteilt, deren Eckpunkte Knotenpunkte der Kuppel bilden. Um diese verschiedenen Knotenpunkte nach dem ersten Bildungsgesetz anzufügen, kann man in der Weise vorgehen, daß man zunächst alle unteren Knotenpunkte gegenüber der Erde festlegt, sie also in festen Lagern stützt, oder durch je drei Stützungsstäbe mit der Erde verbindet, und alsdann die Punkte des zweiten Rings entsprechend anschließt: b_1 durch den Meridianstab $b_1 b$ (Abb. 112) und zwei

Diagonalstäbe ab_1, cb_1; entsprechend Punkt d_1 und k_1, dann a_1, c_1, e_1.

Nachdem in dieser Weise die Punkte des zweiten Rings festgelegt sind, kann man in genau der gleichen Weise zu dem nächst oberen Ring übergehen und die Punkte A, B, $C \cdots K$ anschließen. Innerhalb des oberen Rings sind keine Stäbe einzuziehen, da ja sonst das System zu viel Stäbe besäße, also statisch unbestimmt wäre. Die Lagerstäbe ab, bc, $\cdots ka$ sind ebenfalls nicht vorhanden, indem die Punkte schon an und für sich festgelegt sind. Das so erhaltene Stabgebilde besitzt sicher die richtige Anzahl von Stäben, da es nach dem ersten Bildungsgesetz aufgebaut ist.

Mit diesem System stimmt nun die Schwedler-Kuppel[1]) im wesentlichen überein. Selbstverständlich können die Diagonalen auch derartig angeordnet werden, daß sie alle in demselben Sinne geneigt sind, also etwa vom linken unteren Eckpunkte nach dem rechten oberen (Abb. 113); denn hierdurch wird die Stabilität des Gebildes nicht beeinflußt, da ja die Diagonalen den Zweck haben, die durch Meridiane und Parallelkreise gewonnenen ebenen, labilen Trapezfelder in stabile Dreiecke zu teilen, und es unwesentlich ist, wie dies geschieht.

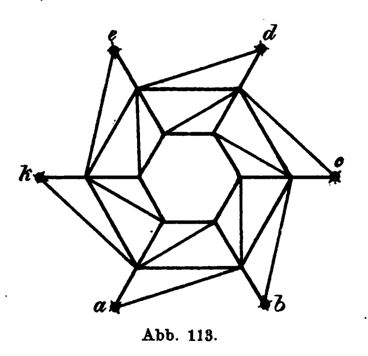


Abb. 113.

Bei der praktischen Ausführung der Schwedler-Kuppel werden die Verbindungsstäbe zwischen den festen Lagern, der sogenannte Lagerring, eingezogen und so entsteht scheinbar ein Stabsystem mit n Stäben zu viel. Nun können aber diese Ringstäbe bei der Berechnung als nicht vorhanden angesehen werden, indem man sie als Versteifungsstäbe betrachtet, als Stäbe, die der festen Erde, dem Widerlager, angehören.[2])

[1]) Schwedler, D. Konstr. d. Kuppeldächer, Ztschr. f. Bauw. 1866, S. 7.
[2]) Föppl, D. Fachw. i. R., S. 66. — D. graph. Statik, 2. Aufl., S. 282.

80. Führt man an Stelle der festen Auflager die Stützungsstäbe ein und anstatt der Erde das Erdfachwerk, von dessen Knotenpunkten die Stützungsstäbe auslaufen, so erhält man das erweiterte System dieser Kuppel. Das Erdfachwerk kann ganz beliebig gewählt werden, muß nur ein starres Raumgebilde darstellen, jedoch ist es für viele Untersuchungen zweckmäßig, dasselbe als ein Pyramidenflechtwerk auszubilden, dessen Seitenzahl mit derjenigen der Kuppel übereinstimmt, und in dessen Grundfläche natürlich Diagonalstäbe eingezogen sind (Abb. 114).

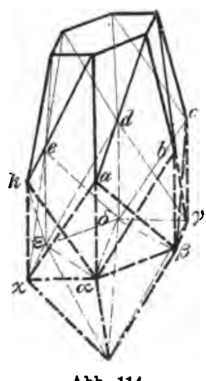


Abb. 114.

In diesem erweiterten System kann nun eine Stabvertauschung vorgenommen werden, indem die Stäbe $b\alpha$, $c\beta$, $d\gamma$, $\cdots$ $a\varkappa$ fortgenommen und dafür die Stäbe ab, $bc \cdots$ eingezogen werden. Man erhält so ein Kuppelsystem, das die Unterringstäbe als notwendige Bestandteile haben muß, und das in jedem Unterringpunkt nur zwei Stützungsstäbe besitzt, also auf Kurvenlagern ruht; denn a, b, $c \cdots$ sind jetzt in Bahnen beweglich senkrecht zu ab, $bc \cdots$ in horizontaler Ebene (Abb. 115). Diese zuerst von Müller-Breslau angegebene Lagerung[1]) hat gegenüber derjenigen auf festen Lagern gewisse Vorzüge: die in den Auflagern, z. B. in a, wirkende Reaktion besitzt jetzt nur noch zwei Komponenten in Richtung ab und senkrecht zur horizontalen Lagerfläche, also vertikal im Raume, dagegen kann in Richtung senkrecht zu ab keine Kraft auftreten. Die Mauer ab wird demgemäß durch das Lager a nicht auf Umkippen beansprucht, dagegen

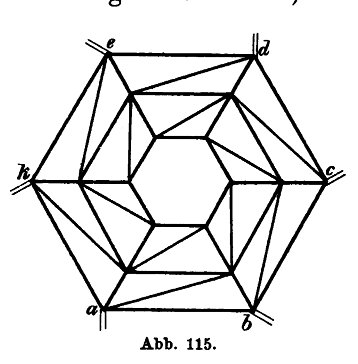


Abb. 115.

[1]) Müller-Breslau, Zentralbl. d. Bauverw. 1892, S. 203.

kann aber die in a wirkende Auflagerkraft auf die Mauer ak einen ungünstigen Einfluß ausüben, da sie diese unter schiefem Winkel schneidet.

Daß durch die zuletzt angegebene Lagerung die Punkte $a, b \cdots k$ bei Vorhandensein des Lagerrings eine unverschiebliche Lage besitzen, ist schon in § 21 bei den Gerüstsystemen bewiesen worden. Hiermit ist gezeigt, daß auch das ganze in Abb. 115 dargestellte Kuppelsystem stabil ist, da man aus obigen Ausführungen weiß, daß die übrigen Punkte an den Lagerring fest angeschlossen sind.

81. Könnte nun die Schwedler-Kuppel nicht vielleicht in anderer Weise möglichst zweckmäßig gestützt werden? Daß bei Vorhandensein des Lagerrings zur Erhaltung eines statisch bestimmten Systems $2n$ Auflagerstäbe anzubringen sind, ergibt sich aus dem Vorhergehenden, auch, daß am günstigsten diese Stützungsstäbe so verteilt werden, daß sie lauter Kurvenlagern entsprechen. Man könnte nun daran denken, die Kurvenlager so anzuordnen, daß ihre Gleitrichtung bei regelmäßigem Grundriß nach dem Mittelpunkt des Vielecks verläuft. Aber aus den Betrachtungen des § 21 geht hervor, daß eine derartige Lagerung für einen regelmäßigen, vieleckigen Ring mit gerader Seitenzahl keine sichere Stützung ergibt, also auch kein stabiles Kuppelsystem liefert. Es darf also jedenfalls eine Schwedler-Kuppel über regelmäßigem Vieleck von gerader Seitenzahl niemals so auf Kurvenlagern gelagert werden, daß die Gleitrichtungen nach dem Mittelpunkt gerichtet sind. Wohl wäre ein System über regelmäßigem Vieleck mit ungerader Seitenzahl stabil; bedenkt man aber, daß bei größerer Anzahl von Seiten der Unterschied zwischen gerader und ungerader Seitenzahl im wesentlichen verschwindet, z. B. bei einem 35- und 36-Eck, so kommt man zu dem Schluß, daß Kuppeln über regelmäßigen Vielecken mit großer Seitenzahl überhaupt zu vermeiden sind, da die Stabilität nicht genügend gesichert ist.[1]

---

[1]) Vgl. Föppl, D. Fachw. i. R., S. 75.

In § 21 wurde auf statischem Wege gezeigt, daß ein regelmäßiger Ring mit gerader Seitenzahl nicht in der angegebenen Weise gelagert werden darf. Es möge nun hier noch der kinematische Beweis nach der Müller-Breslauschen Methode gebracht werden, da gerade derartige Sonderfälle besonders lehrreich sind. Es wird zunächst das gestützte Stabsystem (Abb. 116) in eine zwangläufige Kette verwandelt, indem ein Stab bezw. eine Auflagerbedingung fortgenommen wird; es möge hier Punkt 6 als nicht geführt angesehen werden. Dadurch ist eine Bewegungsfreiheit ersten Grades möglich, d. h. durch Annahme einer Verschiebung sind die anderen bestimmt. Dieselben sollen ermittelt werden mittels der senkrechten Geschwindigkeiten.[1])

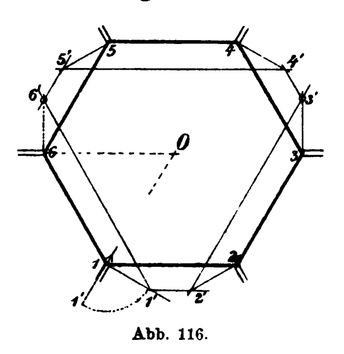


Abb. 116.

Die Verschiebung des Punktes 1, deren Richtung durch die Auflagerbahn gegeben ist, möge mit der beliebigen Größe 1, 1' eingeführt werden; sie werde als senkrechte Verschiebung in der Richtung nach rechts senkrecht zur Auflagerbahn abgetragen. Dann findet sich die senkrechte Verschiebung von 2 aus der Bedingung, daß dieselbe in der Senkrechten zur Bahn von 2 liegen muß, und daß sie auch in der durch 1' parallel zu $\overline{1, 2}$ gezogenen Linie enthalten, da ja $\overline{1, 2}$ als starrer Stab anzusehen ist; es ergibt sich demgemäß der Punkt 2'. In entsprechender Weise ist 3', 4' und 5' zu ermitteln. Die senkrechte Geschwindigkeit des nicht geführten Punktes 6 ist dann dadurch zu finden, daß man durch 5' eine Parallele zu $\overline{5, 6}$ zieht, und durch 1' eine solche zu $\overline{1, 6}$; sie ist hiernach bestimmt durch 6, 6', also eine Richtung senkrecht zur Lagerbahn. Die wirkliche Geschwindigkeit liegt nun in einer Linie senkrecht zu $\overline{6, 6'}$, d. h. in der Richtung der Gleitbahn selbst. Es ist damit gezeigt: Wenn der Punkt 6 nicht geführt wird

[1]) Müller-Breslau, Zentralbl. d. Bauverw. 1892, S. 203.

bewegt er sich, durch die anderen Stäbe gezwungen, in der Richtung $\overline{6,0}$; eine in dieser Richtung angebrachte Gleitbahn kann ihn demgemäß in seiner Bewegung nicht hindern, es ist vielmehr unter allen Umständen bei dieser Lagerung eine Bewegung möglich. Anders lägen die Verhältnisse, wenn sich nach Annahme von $1, 1'$ für den nicht geführten Punkt 6 eine Verschiebungsrichtung ergeben hätte, die nicht mit $\overline{6,0}$ zusammenfällt; dann würde dadurch, daß der Punkt infolge seiner Lagerung gezwungen wird, sich in einer anderen Richtung, nämlich $\overline{6,0}$, zu bewegen, die Bewegung unmöglich gemacht, da ja der Punkt aus der Gleitbahn nicht heraus kann. Diese Verhältnisse liefert ein entsprechend gestütztes Vieleck mit ungerader Seitenzahl, indem sich hierbei für den letzten Punkt eine Verschiebungsrichtung ergibt, die mit der Gleitbahn nicht zusammenfällt.

Der regelmäßige Ring mit gerader Seitenzahl läßt nicht nur eine unendlich kleine Verschiebung zu, sondern sogar eine endliche: Werden nämlich bei dem vierseitigen System nach Abb. 117 die Punkte a und c voneinander entfernt, so werden sich b und d entsprechend nähern können, ohne daß sich die Längen der Stäbe ändern. Anders liegen die Verhältnisse bei ungerader Seitenzahl, indem sich hierbei die Bewegungen der Punkte nicht mehr ausgleichen können, also eine Verschiebung unmöglich wird.

Abb. 117.

82. Es wurde schon oben der Vorteil der Kurvenlager hervorgehoben. Es liegt nun der Gedanke nahe, die Kurvenlager so zu verteilen, daß sie nicht an den Ecken der Mauer liegen, sondern im inneren Teil, also im Verlaufe der Mauerflucht. Um einen vierseitigen Raum z. B. zu überdecken, könnte man etwa so vorgehen, daß man die vier Ecken abschneidet, das so entstehende Achtseit nach Schwedler überdeckt, auf Kurvenlagern nach Abb. 118 stützt und nachträglich die Eckkonstruktion zufügt. Die in Richtung der langen Ringstäbe fallenden Kräfte greifen jetzt nicht mehr in den Ecken an, und Auflagerkräfte treten überhaupt nur in den lotrechten

Mauerebenen selbst auf, aber nirgends senkrecht dazu, da ja die Lager in dieser Richtung beweglich sind. Das so entstandene Raumsystem[1]) besitzt sicher die richtige Anzahl von Stäben, da es nach Schwedler-Art aufgebaut ist und auf $2n$ Stützungsstäben ruht; es ist aber nicht stabil, wie im folgenden auf verschiedene Art bewiesen werden soll, um daran die Methoden zum Stabilitätsnachweis zu zeigen.

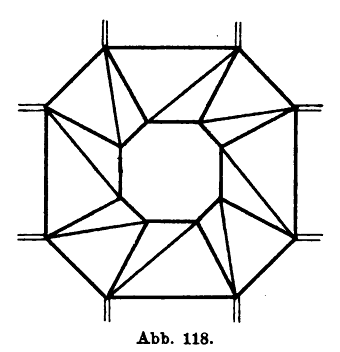


Abb. 118.

Im Anschluß an die auf letzter Seite benutzte kinematische Methode möge diese auch für vorliegende Kuppel zunächst verwendet werden. Es ist zu untersuchen, ob die Unterringpunkte eine unverschiebliche Lage besitzen; liegen diese fest, so ist das ganze System stabil, da die oberen Punkte nach Schwedler-Art angeschlossen sind. Da die verschiedenen Lager in der Horizontalebene beweglich sind, so handelt es sich hier wiederum nur um ein gestütztes, ebenes Ringsystem (Abb. 119). Es möge Punkt 8 als nicht geführt angenommen werden. Die senkrechte Verschiebung von 1 senkrecht zur Auflagerbahn sei durch die beliebige Strecke $1, 1'$ angenommen. Den Punkt $2'$ wird man dann dadurch finden, daß man in 2 eine Senkrechte zu seiner Gleitbahn errichtet und dieselbe zum Schnitt bringt mit der durch $1'$ parallel zu $\overline{1,2}$ gezogenen Linie. Diese beiden Linien fallen aber zusammen mit der Linie $\overline{1,2}$; ihr Schnittpunkt ist also unbestimmt; als solcher werde der beliebig auf der Linie $\overline{1,2}$ gelegene Punkt $2'$ angenommen. Nach Festlegung

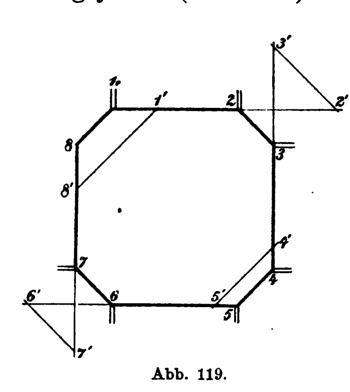


Abb. 119.

[1]) Schlink, Ztschr. f. Arch. u. Ingw. 1904, S. 183.

des Punktes 2′ kann 3′ dadurch ermittelt werden, daß durch 2′ eine Parallele zu $\overline{2,3}$ und in 3 eine Senkrechte zur Gleitbahn gezogen wird; der Punkt 3′ ist also eindeutig bestimmt, sofern 2′ festliegt. Die senkrechte Verschiebung von 4′ ist wiederum willkürlich, da $\overline{3',4'}$ mit der Senkrechten in 4 zusammenfällt. Ist aber dann 4′ angenommen, so besitzt 5′ eine eindeutige Lage, als Schnittpunkt der durch 4′ zu $\overline{4,5}$ gezogenen Parallelen mit der in 5 auf der Gleitbahn errichteten Senkrechten, also mit $\overline{5,6}$. Dagegen liegt 6′ wiederum beliebig auf der Linie $\overline{5,6}$ und durch Annahme von 6′ ist 7′ festgelegt. Der bis jetzt gewonnene Verschiebungsplan ist also noch in dreifacher Hinsicht (bezgl. der Punkte 2′, 4′, 6′) unbestimmt oder vieldeutig.

Nun fehlt aber noch Punkt 8′; derselbe ist durch die Lage von 1′ und 7′ gegeben, indem durch 1′ die Parallele zu $\overline{1,8}$ und durch 7′ die Parallele zu $\overline{7,8}$, also diese Linie selbst, gezogen wird. Wie man demnach auch die Punkte 2′, 4′, 6′ angenommen haben mag, stets wird der Punkt 8′ auf der Linie $\overline{8,7}$ liegen, also 8, 8′ senkrecht zur Gleitbahn des Punktes 8 gerichtet sein. Die wirkliche Verschiebung von Punkt 8 fällt demgemäß, auch wenn derselbe nicht geführt ist, doch stets in Richtung der Lagergleitbahn. Es kann demnach diese Gleitbahn die Beweglichkeit von Punkt 8 nicht verhindern. Dieser Schluß an und für sich gibt bereits an, daß der Ring nicht stabil gelagert ist. Da aber schon bei den Punkten 2′, 4′, 6′ eine dreifache Willkür vorlag, so erkennt man, daß das System in vierfacher Hinsicht labil ist. Wenn dies vom gestützten Unterring gilt, gilt dies aber auch vom ganzen Raumträger, also ist hiernach das in Abb. 118 dargestellte gestützte System vierfach labil.

Wie würde sich dieses Ergebnis wohl algebraisch ausdrücken? Es wurde S. 90 ausgeführt, daß ein System mit der richtigen Stabzahl nur dann labil sein kann, dann aber auch labil sein muß, wenn die Determinante des Stabsystems verschwindet. Verschwindet nur diese Determinante, sind aber die Unterdeterminanten von Null verschieden, so liegt eine

kinematische Unbestimmtheit vom ersten Grade vor. Verschwinden außer D auch noch die ersten Unterdeterminanten, so drückt dies für das Gleichgewichtssystem eine Unbestimmtheit zweiten Grades aus,[1]) also für das Fachwerk eine Labilität zweiter Ordnung. Bei vorliegendem System würden also außer der Systemdeterminante noch die drei nächsten Unterdeterminanten verschwinden.

83. Ein weiterer Beweis für die vierfache Labilität möge gegeben werden mittels des Satzes, daß beim Fehlen von äußeren Kräften auch in allen Stäben die Spannung Null auftreten muß, sofern das System stabil ist. Für vierfache Labilität müßte sich nun ergeben, daß beim Fehlen von äußeren Kräften in vierfacher Hinsicht unbestimmte willkürliche Spannungswerte vorhanden sind. Zum Beweise, daß dies hier der Fall, kann man entweder den räumlich gestützten Unterring oder den in der Ebene gestützten Lagerring ins Auge fassen.

Zu ersterem Zweck werden die Auflager durch Stützungsstäbe, im Raum verteilt, ersetzt (Abb. 120). Im Knotenpunkt a sind die daselbst zusammentreffenden Stäbe so angeordnet, daß alle (am, $a\mu$, $a\alpha$) mit Ausnahme eines einzigen (ab) in einer Ebene liegen; wirkt an diesem Punkt die Kraft Null, so ergibt sich, daß in ab die Spannung Null herrscht, andererseits die Resultante der Stabspannungen am, $a\mu$, $a\alpha$ ebenfalls Null ist. Am Punkte c liegen die Verhältnisse ähnlich: wenn keine äußere Kraft wirkt, so ist sowohl die Spannung in cd, wie auch die Resultante der drei anderen Stabspannungen cb, $c\beta$, $c\gamma$ gleich Null, da sich wieder die drei letzten Stäbe in einer Ebene befinden.

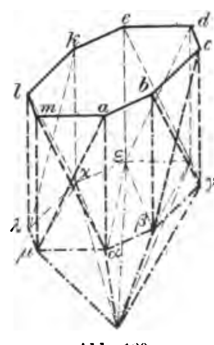


Abb. 120.

Aus gleichem Grunde besitzt beim Fehlen von äußeren Kräften Stab ek und lm die Spannung Null.

Nun betrachte man näher die Seitenflächen, die die

[1]) Vgl. z. B. Henneberg, Entw. usw., D. Math.-Ver. 1894, S. 595.

Diagonalen enthalten: am Punkte a wirkt keine äußere Kraft; es treffen aber daselbst drei Stäbe am, $a\mu$, $a\alpha$ zusammen. Drei sich schneidende Kräfte in einer Ebene können sich nun in der verschiedensten Weise Gleichgewicht halten; man kann demgemäß eine Spannung, z. B. diejenige in am, beliebig annehmen, dann sind hierdurch diejenigen in $a\mu$ und $a\alpha$ bestimmt. Durch am ist aber weiter die Spannung in $m\alpha$ und $m\mu$ gegeben, da ja an m nur noch diese beiden unbekannten Spannungen auftreten ($lm = 0$!). Genau so liegen die Verhältnisse in der Fläche $bc\gamma\beta$: eine Stabspannung, z. B. bc, kann man ganz willkürlich einführen und alsdann die Spannungen der anderen Stäbe $c\beta$, $c\gamma$, $b\gamma$, $b\beta$ bestimmen. In entsprechender Weise darf in den Flächen $ed\delta\varepsilon$ und $lk\varkappa\lambda$ jedesmal eine Spannung ganz beliebig angenommen werden, und hierdurch sind die Spannungen der anderen Stäbe festgelegt.

Man erkennt, daß demgemäß im vorliegenden System eine vierfache Willkür für Wahl der Spannungen besteht und keineswegs in allen Stäben die Spannung Null eindeutig auftritt. Irgend welche Bedingungen, wodurch die eine oder andere Willkür aufgehoben werden könnte, sind nicht vorhanden; dieselben bleiben vielmehr vollständig bestehen. Das System ist vierfach vieldeutig im statischen Sinne, oder, nach dem allgemeinen Beweis, auch vierfach labil.

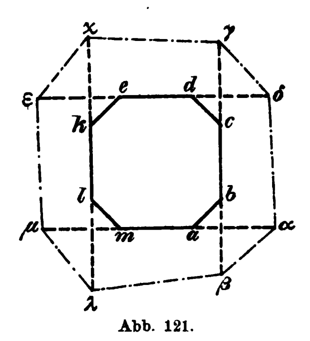


Abb. 121.

Es ist wohl von Interesse, diese Methode auch anzuwenden auf den in der Lagerebene gestützten Ring, zu welchem Zweck die Lagerbedingungen der Ebene durch Stützungsstäbe zu ersetzen sind (Abb. 121), die senkrecht zur Gleitbahn laufen. Ein zweifacher Knotenpunkt ist nicht vorhanden; man geht darum von einem dreifachen Knotenpunkt, etwa a, aus und nimmt die Spannung in einem Stabe desselben, etwa $a\alpha$ beliebig, zu S_1, an. Durch Knotenpunkt a ist dann bestimmt die Spannung in am, gleich S_1, und diejenige in ab, gleich Null.

Auf Grund dieses letzteren Wertes ergibt Knotenpunkt b, daß sich hier zwei Kräfte in derselben Linie Gleichgewicht halten müssen, daß also $b\beta = bc$ sein muß. Im übrigen ist an diesem Knotenpunkt keine Bedingung vorhanden, so daß also diese Spannung ganz beliebig gewählt werden darf; es sei $bc = b\beta = S_2$. Hierdurch ist auf Grund des Knotenpunktes c die Spannung in $c\gamma$ $(= S_2)$ und in cd $(= 0)$ bestimmt. An Knotenpunkt d ist bezüglich der Spannungen wieder Willkür vorhanden: es sei $ed = \delta d = S_3$, und Punkt e ergibt $e\varepsilon = S_3$ und $ek = 0$. Nun gelangt man zu Knotenpunkt k, der wiederum eine Unbestimmtheit aufweist: die Spannung $k\varkappa$ kann beliebig angenommen werden $(= S_4)$ und es ist: $k\varkappa = kl = l\lambda = S_4$, während Knotenpunkt l liefert $lm = 0$. Die Spannung in μm ist gegeben durch S_1, wie aus Knotenpunkt m hervorgeht. Für lm liefert dieser Punkt die Spannung Null, also einen Wert, der sich auch schon durch Punkt l ergeben hat. Weitere Bedingungen sind nicht vorhanden, es können also S_1, S_2, S_3, S_4 willkürlich gewählt werden, d. h. das System ist in statischer Hinsicht vierfach unsicher.

Der Beweis für vierfache Labilität des Systems läßt sich schließlich mittels Stabvertauschung und Anwendung der allgemeinen Gesetze zeigen. Es ist im vorliegenden ebenen System kein zweifacher Knotenpunkt vorhanden, das System also nicht nach einfachstem Bildungsgesetz aufgebaut. Durch eine einmalige Stabvertauschung kann es aber in ein solches übergeführt werden, bei dem je ein Knotenpunkt durch zwei Stäbe angeschlossen ist, indem man z. B. den Stab ab mit $b\alpha$ vertauscht. Dann liegt Punkt b (Abb. 122) fest, da er durch zwei Stäbe angefügt ist.

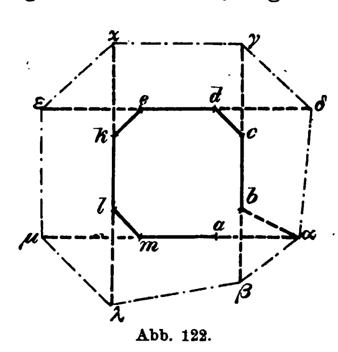


Abb. 122.

Punkt c ist angeschlossen durch die Stäbe cb und $c\gamma$; da aber dieselben in einer Geraden liegen, besitzt der Punkt c keine feste Lage, vielmehr unendlich kleine Verschieblichkeit, und die

Spannungen in beiden Stäben sind nicht eindeutig. Läge aber c tatsächlich fest, so wäre auch d unbeweglich angefügt durch cd und δd. Des weiteren ist angeschlossen der Punkt e durch die Stäbe de und εe in derselben Geraden, liegt also wieder nicht fest. Hätte er tatsächlich eine feste Lage, so würde dies auch von k gelten, dagegen hätte l doch wieder eine unsichere Lage. Punkt m ist an l und μ richtig angeschlossen, während a wieder den Ausnahmefall darstellt. Im ganzen besitzen also c, e, l, a unsichere Lage, und zwar jeder Punkt unabhängig vom anderen, und da durch die Stabvertauschung hierin keine Änderung eintritt, ist auch das ursprüngliche System vierfach beweglich oder instabil vom vierten Grade.

Es darf also eine achtseitige Schwedler-Kuppel nicht in der oben angegebenen Weise gelagert werden, wie auch bei regelmäßigem Vielseit die Lagerung mit tangentialer Gleitbahn[1]) und bei solchen mit gerader Seitenzahl diejenige mit radialer Gleitbahn zu vermeiden ist, da unbrauchbare Systeme entstehen. Dagegen sind die Anordnungen nach Abb. 112 und 115 stabil, und gerade diese beiden haben für die Praxis besondere Bedeutung. Für diese Kuppeln sollen nun im folgenden Paragraphen verschiedene Berechnungsverfahren angegeben werden, die im wesentlichen auf schon früher in allgemeiner Betrachtung erwähnten Methoden beruhen.

§ 25. Berechnung nach Schwedler. — Allgemeines Verfahren.

84. Die von Schwedler selbst angegebene Berechnung[2]) ist nur eine angenäherte. Aber mit Rücksicht darauf, daß auch die Voraussetzungen der genaueren Theorie in der praktischen Ausführung nicht erfüllt sind (Vernietung der Knotenpunkte statt Kugelgelenke usw.), und daß sich die auf Grund des Schwedlerschen Annäherungsweges berechneten Systeme in der

---

[1]) Vgl. S. 160 dieses Werkes.

[2]) Ztschr. f. Bauw. 1866, S. 7.

Ausführung sehr gut bewährt haben, wird die Schwedlersche Berechnungsweise[1]) noch am meisten angewendet, sofern es sich nicht um größere Kuppeln handelt.

Zur Ermittlung der ungünstigsten Beanspruchungen, die durch Eigengewicht und zufällige Last entstehen können, werden von Schwedler nur senkrechte Belastungen eingeführt: Eigengewicht, Schneedruck und die lotrechten Seitenkräfte des Windes, und dabei nur regelmäßig verteilte Belastung in Betracht gezogen, also entweder volle Belastung der ganzen Kuppel oder solche über einzelnen Ringzonen. Durch diese Einführungen gestaltet sich die ganze Berechnung sehr einfach. Vor allem erhalten hierbei die Diagonalen keine Spannung: denn man kann an jedem Knotenpunkt Gleichgewicht herstellen, ohne hierbei den Diagonalen eine Spannung zuerteilen zu müssen; und da beim statisch bestimmten System nur eindeutige Spannungsverteilung möglich ist, es also nur ein richtiges Spannungsbild gibt, ist eben das mit spannungslosen Diagonalen das wirkliche.[2])

Sollen nun die übrigen Spannungen bei symmetrischer Belastung gefunden werden, so zerlegt man nach Abb. 123 an Knotenpunkt 1 die wirkende Kraft P_1 in eine horizontale Komponente (in der Ebene des Lagerrings) und eine solche G_1 in Richtung des Rippenstabes $\overline{1,2}$; dann an Knotenpunkt 2 die Spannung ${}_1S_2$ mit P_2 zusammengefügt in Richtung $\overline{2,3}$ und H_2 usw., so daß der Kräfteplan Abb. 123[c] entsteht. Die verschiedenen Komponenten H_i sind dann weiter in die an den Punkten i zusammenstoßenden Ringstäbe zu zerlegen, und man erhält mittels dieser verschiedenen Komponenten G_i, ${}_rR_i$, ${}_lR_i$ sofort die Spannungen der Gratstäbe (${}_1S_2$, ${}_2S_3 \cdots$) und der Ringstäbe.

Die im untersten Fußpunkt wirkende Horizontalkraft H_4 ist die horizontale Auflagerkomponente; diese Kraft ist gleich-

---

[1]) Vgl. z. B. Förster, Eisenk. d. Ing.-Hochb. — Föppl, D. Fachw. i. R. — Landsberg, Dächer u. Dachstuhlkonstr., Handb. d. Arch. 3. T., II, 4, 2. Aufl. 1901, S. 148. — Müller-Breslau, D. n. M. d. Fest., S. 302.

[2]) Vgl. z. B. Föppl, D. graph. Statik, 2. Aufl., S. 284.

groß, aber entgegengesetzt gerichtet der Horizontalkraft, die am gegenüberliegenden Ende des betreffenden Meridians entsteht. Die Vertikalkomponente der letzten Gratspannung, vermehrt um die im letzten Punkt wirkende Vertikalkraft P_i, liefert die vertikale Auflagerkraft V. Sie ist gleich der halben Summe aller gegebenen äußeren Vertikallasten des betreffenden Meridians. Es stehen demgemäß alle Auflagerkräfte zusammengenommen mit sämtlichen äußeren Kräften im Gleichgewicht. Ist der Fußring zwischen den festen Auflagern eingespannt, so wird derselbe durch die horizontalen Lagerkräfte beansprucht.

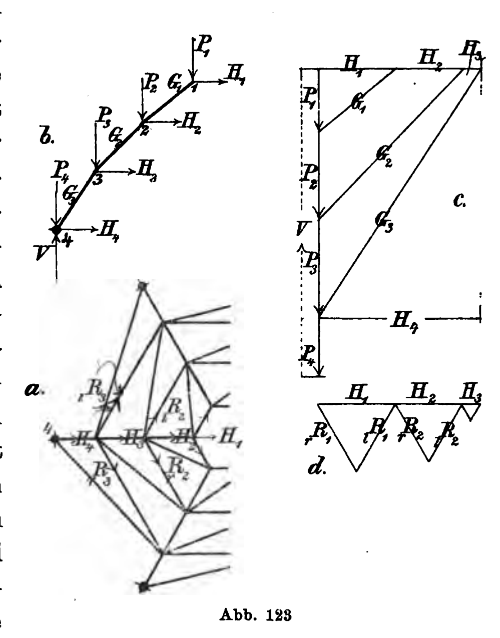


Abb. 123

Schwedler gibt nun an, in welcher Weise lotrecht und symmetrisch eingeführte Lasten zu verteilen sind, damit die verschiedenen Stäbe die größte Spannung erhalten: die Sparren bekommen ihre Maximalspannung, und zwar Druck, wenn die Kuppel vollständig durch Eigengewicht und zufällige Last belastet ist. Größte Zugspannungen in den Ringstäben treten ein, wenn die betreffende Ringzone frei von beweglichen Lasten, aber der Kuppelteil oberhalb dieses Rings ganz belastet ist (der Laternenring erhält hiernach niemals Zug!). Größte Druckspannung in den Ringstäben erfolgt, wenn die betreffende Ringzone und der nach unten liegende Kuppelteil voll belastet ist.

Die Maximalspannung in den Diagonalen wird nach Schwedler in folgender Weise gefunden: man legt eine

Durchmesserebene durch die Kuppel und denkt sich die Spannungen der Stäbe der einen Hälfte durch vollständige Belastung der Kuppel hervorgerufen, diejenigen der anderen nur durch Eigengewicht. Die gerade betrachtete Diagonale verläuft dann zwischen einem belasteten und einem unbelasteten Knotenpunkt, und der eine (etwa der linke) Sparren des Feldes (Abb. 124) hat eine Spannung ${}_lS_g$ durch Eigengewicht allein, der andere eine solche durch Eigengewicht und zufällige Belastung: ${}_rS_g + {}_rS_p$. Nun wird die Diagonale so stark konstruiert, daß sie diesen Spannungsunterschied übertragen kann, also

$$D_m = \frac{{}_rS_g + {}_rS_p - {}_lS_g}{\cos\alpha_m} = \frac{{}_rS_p}{\cos\alpha_m},$$

Abb. 124.

wenn α_m den wirklichen Winkel zwischen Diagonale und Gratstab des betreffenden Feldes bedeutet. Dabei wird dieselbe sicher zu stark, also jedenfalls zugunsten der Sicherheit dimensioniert.

Dadurch, daß Schwedler nur lotrechte und symmetrisch verteilte Belastungen einführt, gestaltet sich die ganze Rechnung höchst einfach.

85. Es möge nun weiter auf die genaue Berechnung der Schwedler-Kuppel eingegangen und zu diesem Zweck zunächst untersucht werden, wie eine Einzellast auf die Kuppel wirkt, einerlei, ob die Stabanordnung nach Abb. 112 oder 113 vorliegt.[1]) Ist die Untersuchung für eine willkürliche Einzellast erledigt, so bietet es keine prinzipiellen Schwierigkeiten, die Spannungen infolge beliebiger Belastung zu ermitteln, da ja jede Belastung durch Zusammensetzung einer Reihe von Einzellasten erreicht werden kann. Zunächst möge hier bestimmt werden, welche Stäbe bei einer gegebenen Einzellast spannungslos bleiben. Wie liegen z. B. die Verhältnisse, wenn an einem Punkt des zweiten Rings (Abb. 125) eine Last angreift.

[1]) Vgl. Föppl, Schweiz. Bauztg. 1882. — D. Fachw. i. R., S. 70. — D. graph. Statik, S. 288.

Am Knotenpunkt A treffen drei Stäbe zusammen. Da in diesem Punkt keine äußere Kraft wirkt, so ist die Spannung in den drei Stäben AB, Aa_2 und AK gleich Null; dasselbe gilt von den Punkten C, E. Nachdem diese Punkte erledigt sind, kann man übergehen zu den Knotenpunkten B, D, K; in diesen treffen jedesmal noch drei unbekannte Spannungen zusammen. Da nun die äußere Kraft die Größe Null besitzt, die bekannten Spannungen ebenfalls Null sind, so ist auch in diesen Punkten die Kraft Null in drei Richtungen zu zerlegen, und es erhalten demgemäß die nicht bekannten Stabkräfte ebenfalls den Wert Null. Also alle Stäbe des obersten Geschosses sind spannungslos.

Dasselbe Resultat würde sich ergeben, wenn Kräfte am zweiten Ring einer nach Abb. 113 gebauten Kuppel angriffen. Die in den einzelnen Punkten des oberen Ringes zusammentreffenden Stäbe sind so verteilt, daß je drei in einer Ebene liegen, dagegen der vierte Stab außerhalb derselben. Würde nun in A eine Kraft wirken, so könnte man die Spannung in AB sofort finden, indem man diese Kraft zerlegt in den freien Stab AB und die Ebene AKa_2k_2; nun soll aber tatsächlich in A keine Kraft angreifen, also tritt in AB die Spannung Null auf. Entsprechend liefert Knotenpunkt B für Stab BC die Spannung Null, dann weiter C diejenige in CD usw., so daß alle Stäbe des obersten Ringes die Spannung Null besitzen. Faßt man nun die an den einzelnen oberen Knotenpunkten noch übrig bleibenden Stäbe ins Auge, so erkennt man, daß jetzt an denselben jedesmal die Kraft Null mit zwei Stabspannungen Gleichgewicht halten soll, daß also auch diese den Wert Null erhalten, womit gezeigt ist, daß in allen Stäben des oberen Geschosses die Spannung Null auftritt.

Für die Untersuchung des zweiten Geschosses (Abb. 125) betrachte man zuerst wieder die Punkte, an denen keine Last angreift. Die Knotenpunkte b_2, $c_2 \cdots k_2$ ergeben zunächst, daß die Stäbe a_2b_2, b_2c_2, c_2d_2, d_2e_2, e_2k_2 die Spannung Null besitzen. Hieraus folgt weiter, daß an den Punkten $b_2 \cdots c_2$

auch die daselbst eintreffenden Grat- und Diagonalstäbe keine Spannung erhalten; wohl aber tritt in $k_2 k_1$ und $k_2 a_1$ eine Spannung auf, da im Stabe $k_2 a_2$ eine solche herrscht. Dies letztere ergibt sich aus Betrachtung des Knotenpunktes a_2, an dem eine äußere Kraft wirkt, die mit der Spannung in $a_2 k_2$, $a_2 a_1$ und $a_2 b_1$ Gleichgewicht zu halten hat, während $a_2 b_2$ keine Spannung besitzt, wie aus Knotenpunkt b_2 ersichtlich.

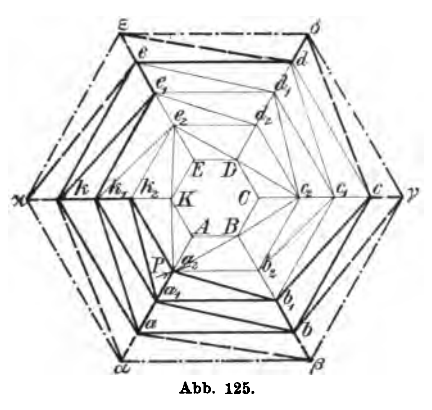


Abb. 125.

Die Spannungen des zweiten Geschosses wirken als Kräfte in den Knotenpunkten des dritten Ringes; demnach treten in k_1, a_1, b_1 Kräfte auf, aber in c_1, d_1, e_1 nicht. Diese letzteren Knotenpunkte liefern deshalb wieder die Spannung Null in den Ringstäben $c_1 b_1$, $d_1 c_1$, $e_1 d_1$ und in den von c_1 und d_1 auslaufenden Grat- und Diagonalstäben. In allen anderen Stäben des dritten Geschosses herrschen aber Spannungen. In b_1 wirkt als Kraft die Spannung in $a_2 b_1$; sie hat Gleichgewicht zu halten mit derjenigen in $b_1 a_1$, $b_1 b$, $b_1 c$. In a_1 greift von dem oberen Geschoß her als Kraft die Resultante von $a_1 a_2$ und $a_1 k_2$ an; da nun von b_1 aus die Spannung in $b_1 a_1$ bekannt ist, so sind durch Knotenpunkt a_1 die Spannungen in $a_1 k_1$, $a_1 a$ und $a_1 b$ bestimmt. Am Knotenpunkt k_1 hält dann die Resultante von $k_1 a_1$ und $k_1 k_2$ Gleichgewicht mit $k_1 a$, $k_1 k$ und $k_1 e_1$, und am Knotenpunkt e_1 letztere Kraft Gleichgewicht mit $e_1 k$ und $e_1 e$.

Hiermit sind alle Spannungen im unteren Geschoß gefunden; es fehlen noch die Stäbe des Fußrings und die Auflagerreaktionen. Letztere können mit Hilfe der Stützungsstäbe gefunden werden. Um dieselben im Grundriß darstellen zu können (Abb. 125), sind sie in schiefer Ebene gedacht, obwohl sie tatsächlich der üblichen Lagerung entsprechend in vertikaler

Ebene liegen.[1]) Aus Betrachtung des Knotenpunktes d ergibt sich in dc die Spannung Null. Alle übrigen Ring- und Stützungsstäbe erhalten Spannungen. An Knotenpunkt c sind bekannt die Spannungen der daselbst eintreffenden Stäbe des untersten Geschosses, unbekannt die Spannungen in cb, $c\gamma$, $c\delta$, die demgemäß sofort zu ermitteln sind. Alsdann liefert Punkt b die Spannungen in ba, $b\beta$, $b\gamma$ und weiter a, k, e je drei neue unbekannte Stabspannungen, so daß schließlich am Knotenpunkt d die noch fehlenden Stabkräfte $d\varepsilon$, $d\delta$, die mit ed in derselben Ebene liegen, gefunden werden können. Die Resultante aus den Spannungen der Stützungsstäbe gibt die Auflagerreaktion an. Um diese Reaktionen möglichst bequem finden zu können, wird man die Stützungsstäbe mit den üblichen Reaktionsrichtungen zusammenfallen lassen, also bei a den einen Stützungsstab senkrecht annehmen, den anderen dagegen wagrecht in der Ebene $ab\beta\alpha$, d. i. in der Verlängerung des Stabes ab; entsprechend fallen an den anderen Ringpunkten die wagrechten Stützungsstäbe in die Verlängerung von bc, cd, $de \cdots$.

§ 26. Die Berechnung der Schwedler-Kuppel mittels gewöhnlicher Kräftezerlegung.

86. Auf Grund des hier für eine Einzellast benützten Gedankengangs (Kraftzerlegung an den einzelnen Knotenpunkten) mögen nun für eine angegebene Belastung die Spannungen tatsächlich bestimmt werden, und zwar auf graphischem Weg, der erlaubt, dieselben in übersichtlicher Weise anzuordnen. An drei aufeinanderfolgenden Punkten jeden Ringes der in Abb. 126 (s. Tafel II) dargestellten Kuppel wirken Kräfte, die nach demselben Punkt gerichtet sind.[2])

Die an den oberen Knotenpunkten angreifenden äußeren

---

[1]) In einer Reihe späterer Figuren werden der Zweckmäßigkeit halber die Stützungsstäbe in dieser Weise angeordnet.

[2]) Dies Beispiel behandelt Müller-Breslau im Zentralbl. d. Bauverw. 1892, S. 201. — Vgl. Förster, Eisenk. d. Ing., 3. Aufl. 1906, S. 356.

Kräfte spaltet man jedesmal zunächst in zwei Komponenten, von denen die eine in Richtung des Gratstabes, die andere in die wagrechte Ringebene fällt, z. B. P_A in Richtung Aa_1 (Q_A) und wagrechte Komponente W_A (Abb. c und d). Diese letztere Komponente wird nochmals in zwei weitere zerlegt, die mit den beiden in A zusammentreffenden Ringstäben zusammenfallen: ${}_lK_A$, ${}_rK_A$. Am Knotenpunkt A sind nun Q_A und ${}_rK_A$ in der Ebene ABb_1a_1 gelegen, in der sich auch die drei Stäbe Aa_1, Ab_1, AB befinden, während ${}_lK_A$ in die Richtung des Stabes AK fällt; folglich hat die Spannung desselben im Gleichgewicht mit ${}_lK_A$ zu stehen. Gleiche Betrachtungen hat man an den anderen Knotenpunkten durchzuführen und findet:

$$\left.\begin{array}{lll} \overline{AK} = -\,{}_lK_A, & \overline{KE} = -\,{}_lK_K, & \overline{ED} = -\,{}_lK_E = 0. \\ \overline{DC} = -\,{}_lK_D = 0, & \overline{CB} = -\,{}_lK_C = 0, & \overline{BA} = -\,{}_lK_B. \end{array}\right\} \quad (49)$$

Hierbei ist für die Komponenten K als positive Richtung die vom Knotenpunkt fortgerichtete eingeführt und für die Stäbe in üblicher Weise die Zugspannung positiv, die Druckspannung negativ.

Nachdem die Spannungen der oberen Ringstäbe ermittelt, kann man an den verschiedenen Knotenpunkten diejenigen in den Grat- und Diagonalstäben bestimmen. An Knotenpunkt A wirken in der Ebene ABb_1a_1 als äußere Kräfte die Lastkomponenten Q_A und ${}_rK_A$, außerdem die Spannung in AB, in derselben Linie wie ${}_rK_A$. Mit diesen Kräften müssen die Spannungen in Aa_1 und Ab_1 (${}_AD_{b_1}$) Gleichgewicht halten. Setzt man (durch algebraische Addition) die Spannung in AB mit ${}_rK_A$ zu einer einzigen Kraft ${}_rR_A$ zusammen, so wirken in der Ebene ABb_1a_1 als Kräfte:

$$ {}_rR_A = {}_rK_A + \overline{AB} = {}_rK_A - {}_lK_B \qquad (50)$$

und

$$Q_A.$$

Da Q_A in die Richtung von Aa_1 fällt, übt diese Kraft auf die Diagonale Ab_1 keinen Einfluß aus. Man stellt nun Gleichgewicht her — mittels Kräftepolygons — zwischen ${}_rR_A$, ${}_AD_{b_1}$ und einer Kraft in Richtung von Aa_1 und findet damit zunächst

die Spannung in Ab_1. Die gleichzeitig in Richtung Aa_1 erhaltene Kraft möge mit ${}^{s}_{A}D^{o}_{b_1}$ bezeichnet werden; dieselbe wirkt als Spannung in Aa_1; dazu kommt die Spannung infolge Q_A, so daß man hat:

$$ {}_{A}G_{a_1} = {}^{s}_{A}D^{o}_{b_1} - Q_A. \tag{51}$$

Entsprechend ist in allen anderen Punkten zu verfahren: Jedesmal die Kraft ${}_{r}R_M$ mit ${}_{M}D_{n_1}$ (Spannung in Mn_1) und ${}^{s}_{M}D^{o}_{m_1}$ in Gleichgewicht zu bringen, wonach dann die Gratspannung in Mm_1 bestimmt ist durch:

$$ {}_{M}G_{m_1} = {}^{s}_{M}D^{o}_{n_1} - Q_M. $$

Die zur Erhaltung von ${}_{A}D_{b_1} \cdots$ und ${}_{A}G_{a_1} \cdots$ notwendigen Kräftepolygone können sofort aufgezeichnet werden, wenn die Felder der oberen Zone in richtigem Maßverhältnis (wahrer Größe) vorliegen. Diese Aufgabe wurde in Abb. *d* durchgeführt und daselbst die erhaltenen Spannungswerte eingetragen.

Man gelangt nun zum zweiten Geschoß. Als äußere Kräfte wirken jetzt P_{a_1}, P_{b_1}, P_{k_1} in den Punkten a_1, b_1, k_1. Jede Kraft wird wieder zerlegt in eine Komponente Q_{a_1} (Q_{b_1}, Q_{k_1}) und eine solche in horizontaler Ebene W_{a_1}, $W_{b_1} \cdots$.

An den Knotenpunkten des zweiten Rings wirken aber außer diesen Lasten noch die Spannungen des oberen Geschosses, z. B. im Punkt a_1 die Spannung der Diagonale ${}_{K}D_{a_1}$ im Stab Ka_1 und Gratspannung ${}_{A}G_{a_1}$. Man zerlegt nun ${}_{K}D_{a_1}$ in zwei Komponenten: eine in Richtung des Grates Aa_1, die mit ${}^{s}_{K}D^{u}_{a_1}$ bezeichnet werden möge, und eine in Richtung des linken Rings ${}^{r}_{K}D^{u}_{a_1}$. Es wirken also von dem oberen Geschoß her:

in Richtung von $a_1 A$ die Kräfte: ${}_{A}G_{a_1} + {}^{s}_{K}D^{u}_{a_1}$,

in Richtung des linken Rings: ${}^{r}_{K}D^{u}_{a_1}$.

Die Werte ${}^{s}_{K}D^{u}_{a_1}$, ${}^{r}_{K}D^{u}_{a_1}$ sind sofort in der Zeichnung des Feldes AKk_1a_1 zu erhalten mittels eines Kraftpolygons (Abb. *d*).

Die Kraft $({}_{A}G_{a_1} + {}^{s}_{K}D^{u}_{a_1})$ zerlegt man nun weiter in zwei Komponenten in Richtung des unteren Gratstabes (Sparrens) $a_1 a$,

die S_{a_1} genannt werden möge, und in horizontale Richtung F_{a_1}. Diese Zerlegung ist in Abb. 126[e] durchgeführt. Wenn man alsdann die äußere Kraft P_{a_1} und die Spannungen der in a_1 zusammenlaufenden Stäbe des oberen Geschosses zusammenfaßt, so kann man sagen:

in Richtung des Grates $a_1 a$ wirken nach unten:

$$Q_{a_1} - S_{a_1},$$

in der horizontalen Ebene:

$$W_{a_1},\ F_{a_1},\ {}_K^r D_{a_1}^u .$$

Wird weiter $(W_{a_1} + F_{a_1})$ in zwei Komponenten ${}_l K_{a_1}$, ${}_r K_{a_1}$ in Richtung der zusammentreffenden Ringstäbe zerlegt, so ist das Kräftebild an Punkt a_1 das folgende:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{in Richtung des Gratstabes } a_1 a: & T_{a_1} \equiv Q_{a_1} - S_{a_1}, \\ \text{in Richtung des linken Rings:} & {}_l E_{a_1} \equiv {}_l K_{a_1} + {}_K^r D_{a_1}^u, \\ \text{in Richtung des rechten Rings:} & {}_r E_{a_1} \equiv {}_r K_{a_1}. \end{array}\right\} \quad (52)$$

Diese Kräfte treten an Stelle von Q_A, ${}_l K_A$, ${}_r K_A$, die an dem oberen Knotenpunkt A wirkten.

Dieselben sind in gleicher Weise an den übrigen Eckpunkten des zweiten Rings zu finden. Da man die notwendigen Zerlegungen alle graphisch in der Ebene ausführen kann, geht das Verfahren rasch von statten. Hat man nun die Kräfte T_{a_1}, ${}_l E_{a_1}$, ${}_r E_{a_1} = {}_r K_{a_1} \cdots$ ermittelt, so findet man genau so, wie beim Obergeschoß, mittels Kräftepolygonen, die in den Feldern in wahrer Größe, Abb. 126[f], gezeichnet sind, die Werte ${}_{a_1} D_b$ und ${}_{a_1}^s D_b^o$ und die Gratspannung ${}_{a_1} G_a$ aus

$${}_{a_1} G_a = {}_{a_1}^s D_b^o - T_{a_1} .$$

Die Ermittlung der Diagonalspannungen für die verschiedenen Knotenpunkte ist in Abb. 126[f], diejenige der Gratspannungen in Abb. 126[e] durchgeführt.

Will man schließlich noch die Auflagerkräfte haben, so hat man in den verschiedenen Knotenpunkten des Lagerrings die Resultante von äußerer Kraft und Spannungen der zusammentreffenden Stäbe zu zerlegen in senkrechte und wagrechte

Komponenten. Die Summe der vertikalen Auflagerreaktionen muß gleich sein der Summe der Vertikalkomponenten der äußeren Kräfte, diejenige der wagrechten Reaktionen in zwei Richtungen gleich derjenigen der Horizontalkomponenten. Um die vertikalen Auflagerkräfte bequem zu finden, zerlegt man zweckmäßig die untersten Diagonalspannungen, z. B. ${}_{k_1}D_a$, in eine Komponente in Richtung des Rings und eine in Richtung des Grats: ${}_{k_1}^{s}D_a^u$ und dann diese letztere Komponente zusammen mit der Spannung im Gratstab ${}_{a_1}G_a$ in eine vertikale ($\overline{V}_a$) und horizontale Komponente. Wirkt keine äußere Kraft, so gibt $\overline{V}$ direkt die Größe der vertikalen Auflagerreaktion V an. In Abb. 126^c sind die verschiedenen Werte $\overline{V}$, die durch die Lasten an den beiden oberen Ringen allein entstehen, ermittelt[1]) und in Abb. 126^f gezeigt, daß tatsächlich $\Sigma\overline{V}_i$ gleich ist der Summe aller vertikalen Lastkomponenten.

Die wagrechten Auflagerkräfte (Spannungen in den gezeichneten Stützungsstäben) erhält man leicht, nachdem man in der oben ausgeführten Weise wieder die Kräfte $T_a \cdots$ (nun senkrecht verlaufend), ${}_lE_a$, ${}_rE_a \cdots$ bestimmt hat, da ja die letzteren mit den wagrechten Lagerkomponenten Gleichgewicht halten müssen.

87. Das hier angewandte Zerlegungsverfahren zur Gewinnung der verschiedenen Spannungen ist ähnlich einer zuerst von Müller-Breslau benutzten, mehr analytischen Berechnung.[2]) Ausgehend von den oberen Knotenpunkten hat man sich ohne weiteres jede unbekannte Diagonalspannung in zwei Komponenten zerlegt zu denken: die eine in Richtung des Rings $r_0 \cdot D$, die andere in Richtung des Grats: $s_0 \cdot D$. Weiter wird die in einem Knotenpunkt wirkende äußere Kraft zerlegt in drei Komponenten in Richtung von Gratstab, linkem und rechtem Ringstab; z. B. an Punkt A: Q_A, ${}_lK_A$, ${}_rK_A$. Dann bestehen die Gleichungen:

---

[1]) Die Werte A', a_1', $\cdots$ geben die vertikalen Komponenten der Kräfte P_A, $P_{a_1} \cdots$ an, die Größen $\overline{V}$ die umgekehrten Auflagerreaktionen.

[2]) Müller-Breslau, Zentralbl. d. Bauverw. 1892, S. 201. — Förster, Eisenk. d. Ing., 1906, S. 356.

$$\left.\begin{aligned} \overline{KA} + {}_lK_A &= 0, \\ \overline{AB} + r_o \cdot {}_AD_{b_1} + {}_rK_A &= 0, \\ {}_AG_{a_1} + s_o \cdot {}_AD_{b_1} + Q_A &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

entsprechend:

$$\overline{AB} + {}_lK_B = 0,$$

usw.

Die Multiplikatoren r_o, s_o sind bekannte Verhältniszahlen, die aus einem Kräftepolygon entnommen werden können. Wenn $\overline{AB}$ bekannt ist, so bestimmt demgemäß die zweite Gleichung von (53) die Spannung ${}_AD_{b_1}$ und die dritte die Gratspannung ${}_AG_{a_1}$.

An der zweiten Zone ist entsprechend zu verfahren. Man hat alsdann die in a_1 einlaufende Diagonalspannung ${}_KD_{a_1}$ in zwei Komponenten zu zerlegen: eine in Richtung des Ringstabes $r_u \cdot {}_KD_{a_1}$ und eine in Richtung des oberen Gratstabes $s_u \cdot {}_KD_{a_1}$, wobei jetzt wiederum r_u und s_u bekannte Verhältniszahlen angeben. Weiter zerlege man die Spannung ${}_AG_{a_1}$, vermehrt um $s_u \cdot {}_KD_{a_1}$, in drei Komponenten: eine in Richtung des unteren Gratstabes $a_1 a$ (S_{a_1}), je eine in Richtung des linken Ringstabes ${}_lF_{a_1}$ und des rechten Ringstabes ${}_rF_{a_1}$. Wirkt nun noch eine äußere Kraft mit den Komponenten Q_{a_1} in Richtung des Gratstabes $a_1 a$, ${}_lW_{a_1}$ in Richtung des linken und ${}_rW_{a_1}$ des rechten Ringstabes, so hat man für die auf den Knotenpunkt a_1 wirkende Gesamtkraft die Komponenten T_{a_1}, ${}_lE_{a_1}$, ${}_rE_{a_1}$ von folgenden Größen:

$$\left.\begin{aligned} T_{a_1} &= Q_{a_1} - S_{a_1}, \\ {}_lE_{a_1} &= {}_lW_{a_1} + {}_lF_{a_1} + r_u \cdot {}_KD_{a_1}, \\ {}_rE_{a_1} &= {}_rW_{a_1} + {}_rF_{a_1}. \end{aligned}\right\} \quad (54)$$

Entsprechendes gilt von den anderen Punkten der zweiten Zone und mit diesen Kräften ist dann zur Ermittlung der Stabspannungen genau so zu verfahren, wie mit Q_A, ${}_lK_A$, ${}_rK_A$ bei der obersten Zone.

88. Diese Berechnungsweise gestaltet sich sehr klar und übersichtlich und erlaubt, da sie im wesentlichen analytisch ist, für die verschiedenen Stäbe den Einfluß der mannigfaltigsten

Einzellasten erkennen zu lassen und so die ungünstigste Belastung anzugeben.

Dadurch, daß man bei den beiden betrachteten Zerlegungsverfahren jede äußere Kraft in Komponenten in Richtung des Grats und der beiden Ringe zerlegt hat, bieten diese[1]) die Möglichkeit, festzustellen, ob eine Diagonale bei einer bestimmten Belastung gezogen oder gedrückt wird, ohne erst die Spannung ermittelt zu haben. Dieser Umstand bietet Vorteile mit Rücksicht auf die Gegendiagonalen, die tatsächlich statt nur einer Diagonale in die Trapezfelder eingezogen werden. Dieselben werden bekanntlich schlaff ausgeführt, so daß jede Diagonale nur eine Zugspannung übertragen kann. Um die Berechnung durchzuführen, ordnet man zunächst in jedem Feld nur eine Diagonale an und ermittelt auf gewöhnliche Weise für diese die Spannung. In den Feldern, in denen die für diese Berechnung zu Grunde gelegte Diagonale Druck erhält, kann dieselbe die Spannung nicht übertragen, da sie infolge des Druckes sofort ausgebogen würde; es tritt darum die andere Diagonale in Wirkung. Ist z. B. in Abb. 127 die Diagonale Ab gedrückt, so nähern sich die beiden Punkte A und b, und die Punkte a, B suchen sich zu entfernen; da aber zwischen diesen ebenfalls eine schlaffe Diagonale gespannt ist, verhütet dieselbe diese Bewegung und erhält dadurch einen bestimmten Zug.

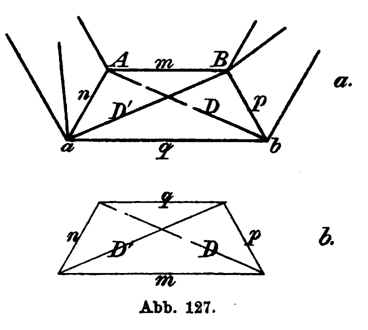


Abb. 127.

Durch das Eintreten der Diagonale aB an Stelle von Ab ändern sich auch die Spannungen der übrigen Stäbe des Feldes. Man kann leicht bestimmen, wie groß die Spannungsänderungen sind, die hierdurch entstehen, indem man das in Abb. 127[b] gezeichnete Kräftepolygon konstruiert, das dem Trapezfeld der Kuppel ähnlich ist.[2]) Man hätte also in allen Feldern, in denen sich

[1]) Müller-Breslau, D. neueren Meth. d. Festigkeitsl., 3. Aufl., S. 292.

[2]) Vgl. Föppl, D. graph. Statik. — Förster, Eisenk. d. Ing.

in den betrachteten einzelnen Diagonalen Druckspannungen ergeben, mittels eines derartigen Kräftepolygons die Zusatzspannungen zu ermitteln und sie den vorher bestimmten Spannungen zuzufügen.

Es ist bei den vorhergehenden Ausführungen stillschweigend vorausgesetzt worden, daß niemals beide Gegendiagonalen Zug erhalten. Tatsächlich kann aber dieser Fall auch vorkommen;[1]) denn es könnte ja sein, daß sich infolge der elastischen Verschiebung sowohl Ab wie Ba in der Länge vergrößert, und dann haben beide Diagonalen Zug. Da aber Belastungen, die diesen Sonderfall bewirken, nur sehr kleine Diagonalspannungen hervorrufen, kann von der Beachtung desselben abgesehen werden.

Man erkennt aus dieser Betrachtung über Gegendiagonalen, daß man bei der Berechnung immer nur auf eine Diagonale jeden Feldes Rücksicht zu nehmen hat. Man kommt leicht auf den Gedanken, für eine bestimmte Belastung die Diagonalen von vornherein so anzuordnen, daß jede nur Zugspannungen erhält. Hat man nun die auf einen Punkt M wirkenden äußeren Kräfte in die drei Komponenten Q_M (in Richtung des Grats), ${}_lK_M$ (linker Ring) und ${}_rK_M$ (rechter Ring) zerlegt, so kann man für ein Feld direkt angeben, ob eine Diagonale gezogen oder gedrückt wird. Im Felde ABb_1a_1 z. B. ist ja

$$\overline{AB} = -{}_lK_B;$$

und die Spannung in der Diagonale Ab_1 wird beeinflußt von ${}_rK_A - {}_lK_B$; ist dieser Wert von Knotenpunkt A fortgerichtet, so erhält Ab_1 Druckspannung, wie aus einem Kräftepolygon (Abb. 126[d]) dieser Kraft, der Diagonale und Kraft in Richtung des Grats hervorgeht. Also immer, wenn ${}_rK_A > {}_lK_B$ ist, tritt in der rechts fallenden Diagonale Druckspannung auf, wenn aber ${}_lK_B > {}_rK_A$, eine Zugspannung. Ist die Diagonale nach links geneigt, so liegen die Verhältnisse umgekehrt.

Um nun allen Diagonalen die richtige Lage zu geben, wird man zunächst diejenigen der oberen Zone vornehmen und

---

[1]) Müller-Breslau, Zentralbl. d. Bauverw. 1892, S. 201. — Betr. Wirkung der Gegendiagonalen vgl. Föppl, D. Fachw. i. R., S. 39.

die verschiedenen Kräfte ${}_lK_M$, ${}_rK_M$ miteinander vergleichen. Dann geht man zum zweiten Ring über, wobei jetzt die Kräfte ${}_lK_M$ und ${}_rK_M$ durch die oben angegebenen ${}_lE_m$ und ${}_rE_m$ zu ersetzen sind, vergleicht diese Werte zweier aufeinanderfolgenden Punkte miteinander und ordnet die Diagonalen so an, daß sie nur Zug erhalten usw.

Da die Gegendiagonalen angeordnet werden, kann man übrigens zur Untersuchung der Schwedler-Kuppel stets von der Anordnung Abb. 112 ausgehen, also einem Raumfachwerk, das nach dem ersten Bildungsgesetz aufgebaut ist. Diese Anordnung ist dann derartig, daß das Stabsystem bei gerader Seitenzahl symmetrisch gebaut ist, also auch der an der Übertragung einer Einzellast beteiligte Kuppelteil symmetrisch gestaltet ist.[1])

§ 27. Berechnung der Schwedler-Kuppel mittels der Momenten- und Projektionsmethode.

89. Zur übersichtlichen Darstellung von Gleichungen mögen weiterhin die Spannung von Ringstäben mit R, diejenige der Gratstäbe mit G und der Diagonalstäbe mit D bezeichnet und zur Festlegung des betreffenden Stabes bei G und D derjenige Index beigefügt werden, der dem oberen Punkte des Stabes entspricht, während beim Ringstab der Punkt ins Auge gefaßt wird, für den dieser Stab mit G und D nicht in derselben Ebene liegt; z. B. (Abb. 128):

$$AB \equiv R_A, \quad Ak_1 \equiv D_A, \quad Aa_1 \equiv G_A.$$

Zur Aufstellung der Gleichungen für die verschiedenen Spannungen wird zweckmäßig die Momenten- oder Projektionsmethode verwendet.

Bei Anwendung der ersteren werden als Gleichgewichtsbedingungen an den einzelnen Knotenpunkten diejenigen benützt, daß die Summe der Momente aller Kräfte für eine beliebige Achse verschwinden muß. Es handelt sich dann darum, die Momentenachse so zu wählen, daß man günstige Gleichungen

---

[1]) Föppl, D. Fachw. i. R., S. 71.

bekommt. Diese Momentenmethode, die auf die Schwedler-Kuppel zuerst von Landsberg[1]) angewendet wurde, erlaubt, die nötigen Gleichungen in eleganter Form aufzustellen.

Jede äußere Kraft sei (Abb. 128) in drei Komponenten X, Y, Z zerlegt: Z senkrecht nach unten, X wagrecht in Richtung des freien Ringstabes (der außerhalb der Ebene der anderen einlaufenden Stäbe liegt), Y senkrecht dazu nach innen. Wenn also etwa eine Kraft P mit der wagrechten Ebene den Winkel φ, mit der durch den freien Stab senkrecht gelegten Ebene den Winkel χ bildet, so besitzen X, Y, Z die Werte:

$$\left.\begin{aligned} X &= P \cdot \cos\varphi \cdot \cos\chi, \\ Y &= P \cdot \cos\varphi \cdot \sin\chi, \\ Z &= P \cdot \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

Wohl könnte es zweckmäßig erscheinen, die wagrechten Komponenten bei der zu betrachtenden symmetrischen Kuppelform so anzuordnen, daß die eine in radialer Richtung, die andere senkrecht dazu verläuft; da aber das ganze Stabsystem nicht völlig symmetrisch angeordnet ist, sollen die Kräfte in angegebener Weise eingeführt werden.

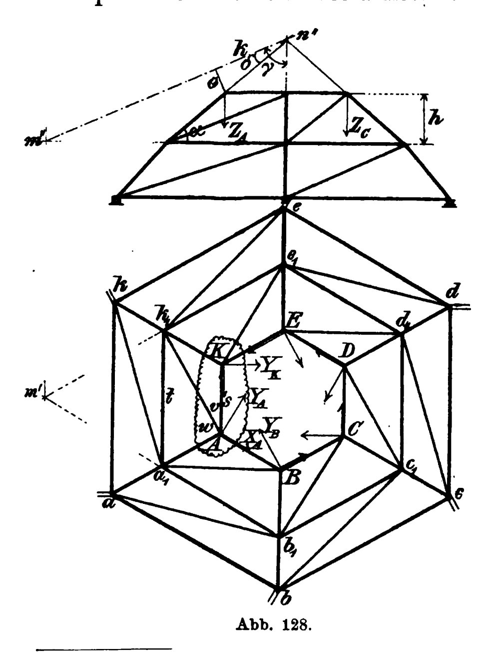


Abb. 128.

Zunächst sind die Spannungen in den obersten Ringstäben zu ermitteln. Der Knotenpunkt A dient dazu, die Spannung R_A im freien Ringstab AB zu finden. Man legt einen Flächenschnitt um A herum und

[1]) Landsberg, Zentralbl. d. Bauverw. 1903, S. 361.

sucht die Momentenachse so zu wählen, daß alle Stäbe mit Ausnahme von AB dieselbe schneiden. Da nun AK, Ak_1, Aa_1 in derselben Ebene liegen, so erfüllt jede Linie in dieser Ebene den gewünschten Zweck, z. B. $k_1 a_1$. Einen Momentenbeitrag bezüglich dieser Achse liefern außer R_A noch die äußeren Kräfte Z_A, X_A, Y_A. Um das Moment dieser verschiedenen Kräfte aufzustellen, zerlegt man zweckmäßig jede Kraft in eine Richtung parallel zur Momentenlinie, also Richtung KA, und in eine Komponente senkrecht dazu in der durch die erste Richtung und die betreffende Kraft bestimmten Ebene; nur die letzte Komponente hat für die Achse ein Moment.

Man hat demgemäß die Kräfte X_A und Y_A in der wagrechten Ebene je in zwei Komponenten zu spalten in Richtung KA und senkrecht dazu. Sie besitzen die Größen (Abb. 129[b, c]):

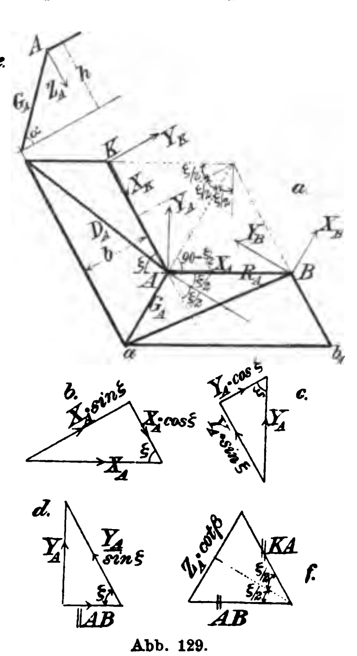


Abb. 129.

$$\text{in Richtung } KA \begin{cases} X_A \cdot \cos \zeta, \\ Y_A \cdot \sin \zeta, \end{cases}$$

$$\text{senkrecht dazu} \begin{cases} X_A \cdot \sin \zeta, \\ Y_A \cdot \cos \zeta, \end{cases}$$

wobei ζ den Centriwinkel über einer Kuppelseite darstellt. R_A liefert die Komponenten:

$$R_A \cdot \cos \zeta \text{ (Richtung } KA)$$

und

$$R_A \cdot \sin \zeta \text{ (senkrecht dazu).}$$

Z_A braucht nicht zerlegt zu werden, da es bereits senkrecht zur Momentenachse verläuft.

Bezeichnet man die Höhe des obersten Geschosses mit h, die horizontale Entfernung zweier entsprechenden Ringstäbe mit b, so erhält man die Gleichung:

$$(R_A \cdot \sin \zeta + X_A \cdot \sin \zeta + Y_A \cdot \cos \zeta)\, h + Z_A \cdot b = 0.$$

$$R_A = - \left\{ X_A + Y_A \cdot \cot \zeta + \frac{Z_A}{\sin \zeta} \cdot \frac{b}{h} \right\}. \tag{56}$$

Mittels entsprechender Gleichungen können die Spannungen aller oberen Ringstäbe gefunden werden.

90. Nachdem dies geschehen, lassen sich die Diagonalspannungen berechnen, z. B. D_A, indem man für alle Kräfte des losgelösten Knotenpunktes A das Moment bezgl. der Achse $a_1 b_1$ aufstellt. In dieser Momentengleichung treten außer den äußeren Kräften noch R_K und D_A auf, so daß D_A die einzige Unbekannte ist. Will man eine Gleichung haben, die die Berechnung der Diagonalspannung direkt erlaubt, ohne daß man erst die Ringspannung bestimmt hat, so lege man einen Flächenschnitt (Abb. 128) um die Punkte A und K herum. Derselbe trifft die Stäbe AB, Aa_1, Ak_1, Kk_1, Ke_1 und KE. Die am Knotenpunkt K durchschnittenen Stäbe liegen alle in einer Ebene, am Knotenpunkt A dagegen: Ak_1 (D_A) nicht in der Ebene von AB und Aa_1. Führt man nun als Momentenachse die Schnittlinie der beiden Ebenen KEe_1k_1 und ABb_1a_1 ein, so wird von den in Betracht kommenden Stabspannungen nur D_A einen Momentenbeitrag liefern, da alle anderen die Momentenachse mn treffen.

Um nun das Moment von D_A aufzustellen, zerlegt man diese Kraft zweckmäßig zunächst in zwei Komponenten, von denen die eine in Richtung Aa_1 (${}_sD_A$) fällt und zum Momentenausdruck nichts beiträgt, die andere (${}_rD_A$) die Richtung von AK besitzt. Werden die wirklichen Winkel zwischen Diagonalstab und Grat- bezw. Ringstab mit w und v bezeichnet, so ergibt sich für die Komponenten:

$$\left.\begin{aligned} {}_rD_A &= D_A \cdot \frac{\sin w}{\sin (w+v)} = \varrho \cdot D_A, \\ {}_sD_A &= D_A \cdot \frac{\sin v}{\sin (w+v)} = \sigma \cdot D_A, \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

wobei also ϱ und σ je einen bekannten Faktor darstellt, den man analytisch oder graphisch leicht ermitteln kann. Der noch fehlende Hebelarm o der Kraft ${}_rD_A$ für die Achse mn

ist aus dem Aufriß direkt zu entnehmen und kann auch rechnerisch leicht bestimmt werden, ausgehend von

$$o = k \cdot \operatorname{tg} \delta,$$

worin k und δ sofort durch bekannte Größen dargestellt werden können.

Weiter ist noch das Moment der an den Punkten A und K wirkenden äußeren Kräfte bezüglich der Linie mn aufzustellen. X_A hat kein Moment, da es in der Ebene ABb_1a_1 liegt. Y_A wird zerlegt (Abb. 129[d]) in Richtung AB und KA, nur letztere Komponente $\frac{Y_A}{\sin \zeta}$ liefert einen Beitrag zum Moment. Die Kräfte X_K, Y_K werden gespalten in Richtung EK und KA, von denen nur die letzteren Komponenten X_K, $Y_K \cdot \cot \zeta$ für das Moment in Betracht kommen. Diese drei Kräfte wirken an demselben Hebelarm wie die Komponente von D_A in Richtung des Rings: $\varrho \cdot D_A$.

Außerdem tritt noch das Moment von Z_A und Z_K in der Gleichung auf. Um ihr Moment darzustellen, zerlegt man jede dieser Kräfte in zwei Komponenten, von denen die eine parallel zu mn wirkt, die andere senkrecht dazu; nur letztere Komponenten ergeben einen Momentenbeitrag, und zwar ist der Hebelarm gegeben durch die halbe Länge der oberen Ringstäbe $\frac{s}{2}$ (Abb. 128). Wird der Winkel zwischen der Vertikalen und der Richtung mn mit γ bezeichnet, so hat man für die Komponente senkrecht zur Momentenachse $Z_A \cdot \sin \gamma$ bezw. $Z_K \cdot \sin \gamma$ und zwar besitzen beide entgegengesetzten Drehungssinn. Das Gesamtmoment der an dem betrachteten Flächenschnitt wirkenden Kräfte ergibt demgemäß die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \left(-\varrho \cdot D_A - \frac{Y_A}{\sin \zeta} + X_K + Y_K \cdot \cot \zeta\right) \cdot o \\ + (Z_K - Z_A) \cdot \sin \gamma \cdot \frac{s}{2} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

in der D_A die einzige Unbekannte ist. Drückt man schließlich o und $\sin \gamma$ durch bekannte Werte aus, so erhält man eine allgemeine Gleichung für die Diagonalspannungen.

91. Zur Ermittlung der Gratspannungen, z. B. G_A, läßt sich nun kein Flächenschnitt in der Art legen, daß sich alle Stäbe mit Ausnahme des Gratstabes in derselben Ebene befinden; aber wohl kann man die Momentenachse so einführen, daß die Spannungen der Stäbe, die außer dem Gratstab einen Momentenbeitrag ergeben, bekannt sind. Man könnte z. B. zur Ermittlung von G_A denselben Flächenschnitt wie oben (Abb. 128) legen, und als Momentenachse eine Linie in der Ebene EKk_1e_1, z. B. k_1e_1, wählen. Von den durch den Flächenschnitt getroffenen Stäben liefern nur R_A und G_A ein Moment, außerdem die äußeren Kräfte; in der Momentengleichung tritt demnach nur G_A als Unbekannte auf.

Einfacher erhält man die gewünschte Gleichung, indem man einen Flächenschnitt um A legt und nun das Moment aufstellt für eine Linie in der Ebene der oberen Ringstäbe, z. B. KB. Für diese Achse haben R_A, R_K kein Moment, ebenso nicht X_A, Y_A. Wird wieder D_A in die zwei Komponenten $\varrho \cdot D_A$ (Ringrichtung) und $\sigma \cdot D_A$ (Sparrenrichtung) zerlegt, so schneidet erstere Komponente ebenfalls die Momentenachse, letztere aber nicht. Von den wirkenden Kräften treten demnach in der Momentengleichung auf: G_A, $\sigma \cdot D_A$ (in derselben Linie) und Z_A. Da die Momentenlinie KB horizontal verläuft, wird man zur Bildung des Momentes der in Linie Aa_1 wirkenden Kraft diese zerlegen in eine vertikale Komponente und eine horizontale, von denen nur erstere mit der Größe $(G_A + \sigma \cdot D_A) \cdot \sin\beta$ für das Moment in Betracht kommt, und man erhält — wenn β den Neigungswinkel des Grats und p die Entfernung des Punktes A von KB bedeutet — die Beziehung:

$$(G_A + \sigma \cdot D_A) \cdot \sin\beta \cdot p + Z_A \cdot p = 0,$$

$$G_A = -\frac{Z_A}{\sin\beta} - \sigma \cdot D_A. \tag{59}$$

Die Gleichung drückt nichts anderes aus, als daß an A die Summe aller Kraftkomponenten in der vertikalen Richtung verschwinden muß.

92. Die verschiedenen Gleichungen können natürlich statt mit dem Momentenverfahren auch mit der Projektionsmethode gefunden werden, die im wesentlichen auf die erstere hinausläuft. Um die Spannung in einem freien Ringstab (der nicht mit der Diagonale in derselben Ebene liegt) zu ermitteln, stellt man die Summe aller Kraftkomponenten senkrecht zur Nachbarebene auf und setzt sie gleich Null fest, faßt also z. B. zur Berechnung von $AB\,(R_A)$ die Richtung senkrecht zur Ebene AKk_1a_1 ins Auge. Die drei Stäbe AK, Ak_1, Aa_1 liefern für diese Richtung keine Komponente, da sie senkrecht zu ihr stehen, und man erhält demgemäß eine Gleichung, die nur R_A und P_A enthält.

Um weiter die Diagonalspannung D_A zu finden, kann man die Bedingung benützen, daß die Summe aller Komponenten in der Richtung senkrecht zu (R_A, G_A) verschwinden muß, und gewinnt so eine Gleichung, in der außer D_A nur noch R_K und die äußere Kraft P_A vorkommt, also D_A die einzige Unbekannte ist.

Um schließlich die Gratspannungen, z. B. G_A, zu ermitteln, wird man am zweckmäßigsten die Summe aller Kraftkomponenten in der Vertikalen aufstellen. In dieser Gleichung treten außer der Unbekannten G_A nur P_A und D_A auf, während die Ringspannungen keinen Beitrag liefern. Gerade an dieser Bedingungsgleichung erkennt man klar ihren Zusammenhang mit der Momentengleichung; sie liefert direkt die Formel:

$$(\sigma \cdot D_A + G_A) \cdot \sin\beta + Z_A = 0.$$

Im allgemeinen ist bei der Projektionsmethode größere Vorsicht geboten, wie dieses die Aufstellung der Gleichung für D_A zeigt, bei der die Komponentensumme senkrecht zu (R_A, G_A) einzuführen ist. Man zerlegt Y_A in zwei Komponenten in Richtung AB gleich $\frac{Y_A}{\operatorname{tg}\zeta}$ und KA: $\frac{Y_A}{\sin\zeta}$; ebenso denke man sich D_A in zwei Komponenten gespalten, von denen die eine in Richtung des Rings KA fällt: $\varrho \cdot D_A$, die andere in Richtung des Grats Aa_1: $\sigma \cdot D_A$. Die Kräfte in Richtung

von $AB\left(R_A,\ X_A,\ \frac{Y_A}{\operatorname{tg}\zeta}\right)$ liefern für die aufzustellende Gleichung keinen Beitrag, ebenso nicht die Kraft in Richtung Aa_1, wohl aber diejenigen in Richtung KA und dann noch Z_A. Die Kraft in dieser ersten Richtung:

$$\frac{Y_A}{\sin\zeta} + R_K + \varrho \cdot D_A$$

wird nun zerlegt in zwei Komponenten, von denen die eine in die Ebene (G_A, R_A), also (ABb_1a_1), fällt, die andere senkrecht dazu steht. Nur diese letztere kommt in Betracht:

$$\left(\frac{Y_A}{\sin\zeta} + R_K + \varrho \cdot D_A\right) \cdot \cos\nu,$$

wenn ν der Winkel der erwähnten Senkrechten und KA ist. Zur Berücksichtigung der Kraft Z_A kann man diese zerlegen in zwei Komponenten in Richtung des Grats und horizontal: $Z_A \cdot \cot\beta$ (wenn β Neigungswinkel des Grats gegen den Horizont bedeutet) und letztere Komponente nochmals in zwei solche in Richtung KA und AB, von denen nur die erstere in Betracht kommt:

$$\frac{Z_A}{2} \cdot \frac{\cot\beta}{\sin\zeta/2}.$$

Diese Kraft kommt zu den obenerwähnten in Richtung KA hinzu und es wird demgemäß die Gleichung erhalten:

$$\left(\frac{Y_A}{\sin\zeta} + R_K + \varrho \cdot D_A + \frac{Z_A}{2} \cdot \frac{\cot\beta}{\sin\zeta/2}\right) \cdot \cos\nu = 0,$$

$$\frac{Y_A}{\sin\zeta} + R_K + \varrho \cdot D_A + \frac{Z_A}{2} \cdot \frac{\cot\beta}{\sin\zeta/2} = 0.$$

Setzt man für R_K seinen Wert ein, der ja auch mit der Projektionsmethode gefunden werden kann, so ergibt sich:

$$\varrho \cdot D_A = -\frac{Y_A}{\sin\zeta} - \frac{Z_A}{2} \cdot \frac{\cot\beta}{\sin\zeta/2} + X_K + Y_K \cdot \cot\zeta + \frac{Z_K}{\sin\zeta} \cdot \cot\alpha, \quad (60)$$

wobei

$$\cot\alpha = \frac{b}{h}.$$

93. Sind die wirkenden äußeren Kräfte in der Weise zerlegt, daß $\overline{Z}$ nach unten wirkt, $\overline{Y}$ wagrecht nach dem Mittelpunkt, $\overline{X}$ senkrecht hierzu in der wagrechten Ebene nach rechts, so kann man die erhaltenen Gleichungen ohne weiteres benützen, wenn man bedenkt, daß:

$$\left.\begin{aligned} X &= \overline{Y} \cdot \sin \zeta/2 + \overline{X} \cdot \cos \zeta/2, \\ Y &= \overline{Y} \cdot \cos \zeta/2 - \overline{X} \cdot \sin \zeta/2. \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

Nachdem die Spannungen aller Ring-, Diagonal- und Gratstäbe des oberen Geschosses ermittelt sind, können diejenigen des zweiten Geschosses mit Hilfe obiger Gleichungen gefunden werden, wobei aber zu beachten ist, daß zu den äußeren Kräften noch die Spannungen der vom Obergeschoß einlaufenden Stäbe zu rechnen sind. Man wird dann z. B. an Knotenpunkt a_1 die Spannung in $a_1 B$ (D_B) zerlegen in zwei Komponenten in Richtung $a_1 A$ und $a_1 b_1$, dann G_A und die erstere Komponente zusammen in eine senkrechte und wagrechte Komponente; die verschiedenen wagrechten Kräfte sind dann schließlich in der X- und Y-Richtung zusammenzufügen. Hierfür hat es etwas Vorteil, wenn die Y-Richtung radial und die X-Richtung senkrecht dazu eingeführt ist.

Mit Hilfe der angegebenen Formeln ist es möglich, die Spannung jedes Stabes in einem Ausdruck darzustellen, der nur die äußeren Kräfte enthält, so daß die Wirkung jeder einzelnen Last und besonders auch diejenige Belastung festgestellt werden kann, durch die der betreffende Stab seine größte Beanspruchung erhält.

94. Im Zusammenhang mit der Momentenmethode möge schließlich noch die Beziehung betrachtet werden, die zwischen den Spannungen von je drei aufeinander folgenden Diagonalen besteht, und die bereits von Zimmermann[1]) aufgestellt wurde. Man legt einen Flächenschnitt um vier aufeinander folgende Knotenpunkte, z. B. A, B, C, D (Abb. 128), der die Stäbe AK, Ak_1, Aa_1, Ba_1, Bb_1, Cb_1, Cc_1, Dc_1, Dd_1 und DE trifft, und stellt

[1]) Vgl. Zimmermann, Über Raumfachwerke, Berlin 1901. — Landsberg, Zentralbl. d. Bauverw. 1903, S. 361.

nun das Moment aller an dem oberen Schnittteil angreifenden Kräfte für die Schnittlinie der Ebenen AKk_1a_1 und DEe_1d_1 als Momentenachse auf. Dann haben die Stäbe dieser Ebenen kein Moment, ebenso nicht die Gratstäbe, und in der Gleichung treten nur die Spannungen der drei aufeinander folgenden Diagonalen (die mit D_1, D_2, D_3 bezeichnet werden mögen) auf, sowie das Moment der in A, B, C, D wirkenden äußeren Kräfte, das M genannt werden soll. Um das Moment der Diagonalspannungen aufzustellen, werden diese jedesmal in zwei Komponenten D_r und D_s, in Richtung des Rings und des Sparrens, zerlegt. D_s liefert kein Moment, da die Gratlinie die Momentenlinie auf der Achse der Kuppel schneidet; dagegen ergeben ${}_1D_r$, ${}_2D_r$ und ${}_3D_r$ einen Momentenbeitrag und man kann demgemäß die Momentengleichung in der Form schreiben:

$$\varkappa_1 \cdot {}_1D_r + \varkappa_2 \cdot {}_2D_r + \varkappa_3 \cdot {}_3D_r = M,$$

wobei die Werte $\varkappa_i$ aus der gegebenen Kuppelgestalt leicht zu ermitteln sind.

Sechstes Kapitel.

Netzwerk- und Zimmermann-Kuppel.

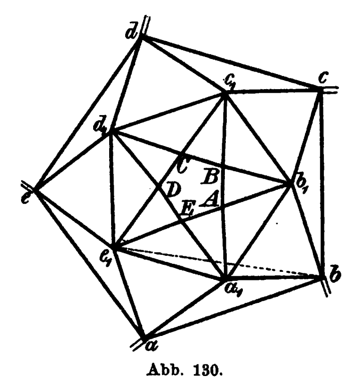
§ 28. Die Netzwerkkuppel.

95. Eine Kuppel, die ein sehr lehrreiches Beispiel für Behandlung räumlicher Stabsysteme darstellt, ist die Netzwerkkuppel.[1]) Der wesentliche Unterschied derselben gegenüber der Schwedler-Kuppel ist der, daß die beiden Ringfiguren, die ein Geschoß begrenzen, nicht mehr gleiche Lage haben, sondern der eine Ring gegen den anderen verdreht ist. Bei der gewöhnlichen Ausführung liegt immer eine Ecke über der Mitte einer Seite des vorhergehenden Rings.

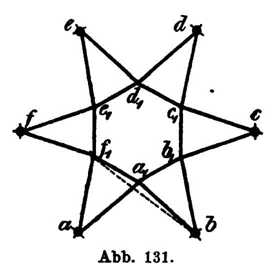
---

[1]) Föppl, Schweiz. Bauztg. 1888. — D. Fachw. i. R., S. 81. — D. graph. Statik.

Eine zweigeschossige Kuppel dieser Art über einem fünfseitigen Raum ist in Abb. 130 dargestellt. Die unteren Punkte $a \cdots e$ sind irgendwie festgelegt, die Punkte des nächsten Rings $a_1 \cdots e_1$ in der angegebenen Weise mit den unteren verbunden, und daran schließt sich ein System in genau der gleichen Bauart an. Wenn nachgewiesen ist, daß das untere Geschoß stabil ist, so ist dies ohne weiteres auch vom zweiten Geschoß zu sagen, da die Punkte des oberen Geschosses in gleicher Weise angefügt sind. Für die Stabilitäts- und Spannungsuntersuchung soll darum nur die eingeschossige Netzwerkkuppel betrachtet werden.


Abb. 130.

Wie die Punkte $a, b \cdots$ festgelegt sind, ist für die eigentliche Netzwerkkuppel unwesentlich; es können diese Punkte alle auf festen Lagern ruhen (Abb. 131), dann ist der Ring $a, b \cdots$ überflüssig, oder aber es sind in diesen Punkten bei Vorhandensein des Rings Gleitlager angebracht, die z. B. senkrecht zu den einzelnen Stäben beweglich sind (Abb. 130). Daß letztere Anordnung einen unverschieblichen Unterring, also eine feste Lage der Punkte $a \cdots e$ ergibt, geht aus früheren Bemerkungen bei den Gerüstsystemen und der Schwedler-Kuppel hervor.


Abb. 131.

96. Nach welchem Bildungsgesetz kann man sich nun die Punkte $a_1 \cdots e_1$ an die unteren Punkte angeschlossen denken? Man vertausche (Abb. 130) einen Stab, etwa $e_1 a_1$, mit einem anderen, der von der Erde nach a_1 oder e_1 läuft, z. B. $b e_1$. Dann ist e_1 festgelegt durch drei Stäbe, die von sicher unverschieblichen Punkten a, b, e ausgehen; weiter ist Punkt d_1 fest angefügt durch die Stäbe $e_1 d_1$, $e d_1$, $d d_1$, und ebenso be-

sitzen die weiteren Punkte c_1, b_1, a_1 feste Lage. Also dieses System ist starr, da nach dem ersten Bildungsgesetz aufgebaut. Hieraus geht zunächst hervor, daß die Netzwerkkuppel die richtige Stabzahl besitzt, da sie aus dem geänderten System durch einfache Stabvertauschung erhalten wird; ob sie aber stabil ist, ist besonders zu zeigen.

Nach den früheren Ausführungen (Nr. 42) ist das neue System, also die Netzwerkkuppel, stabil, wenn durch eine in Richtung des Stabes $e_1 a_1$ wirkende Kraft, etwa $X = 1$, in dem Stabe $e_1 b$, der jetzt die Rolle des Ersatzstabes spielt, nicht die Spannung Null auftritt. Es ist demgemäß nachzusehen: Wird die in $e_1 b$ entstehende Spannung S_e' unter allen Umständen, einerlei wie die Form des unteren und oberen Rings ist, immer einen von Null verschiedenen Wert erhalten? Solange keine Regelmäßigkeit vorliegt, ist dies zu erwarten, andrerseits läßt sich vermuten, daß bei einer Kuppel über regelmäßigem Raum am ersten eine Ausnahme eintreten wird.

Aus früheren Betrachtungen (Nr. 71 und 81) erkennt man leicht, daß vorliegendes System über regelmäßigem Vieleck mit gerader Seitenzahl nicht stabil ist; es müßte sich also jetzt ergeben, daß in diesem Fall die Spannung S_e' den Wert Null erhält. Für diese Untersuchung möge zunächst eine Kuppel über regelmäßigem Sechseck ins Auge gefaßt und nun der Stab $a_1 f_1$ mit $b f_1$ (Abb. 131) vertauscht werden. Beim Spannungszustand S_i' wirkt an jedem Endpunkt von $a_1 f_1$ eine Kraft von der Größe 1. Diese Kraft ist an a_1 zu zerlegen in $a_1 b_1$, $a_1 a$ und $a_1 b$. Da nun „1" und $a_1 b_1$ in der horizontalen Ebene liegen, $a a_1$ und $b a_1$ in einer anderen Ebene, so muß die Resultante von $a_1 a$ und $a_1 b$ in die Schnittlinie von diesen beiden Ebenen, also in eine horizontale Linie, fallen, und zwar — wenn die unteren Punkte a, $b \cdots$ auf horizontaler Ebene liegen — in eine durch a_1 parallel zu ab gezogene. Dasselbe gilt von den anderen Punkten b_1, $c_1 \cdots$: die Resultante je zweier Gitterstäbe fällt stets in eine Linie parallel zum betreffenden unteren Ringstab. Am Knotenpunkt a_1 kann man hiernach durch Bildung eines ebenen Kräftepolygons die

Spannung in $a_1 b_1$ finden und die Resultante von $a a_1$ und $b a_1$, dann an Knotenpunkt b_1 durch entsprechendes Verfahren die Spannung in $b_1 c_1$ usw. Hierbei findet sich für alle Ringspannungen bei der vorliegenden regelmäßigen Anordnung die gleiche absolute Größe „1", aber verschiedene Richtung. Ist etwa die Spannung im fortgenommenen Stab $f_1 a_1$ als Zug eingeführt, so besitzt $a_1 b_1$ Druck, dann $b_1 c_1$ Zug und so fort, d. h. die einzelnen Ringstäbe erhalten abwechselnd Zug und Druck, wie dies schon in Nr. 71 ausgeführt wurde. Im vorliegenden System erhält $e_1 f_1$ (durch Knotenpunkt e_1) eine Druckspannung, sofern $f_1 a_1$ als Zug eingeführt war, also jedenfalls eine gleichgroße, aber entgegengesetzt gerichtete Spannung. Die Resultante der beiden Kräfte an Knotenpunkt f_1 (Spannung „-1" in $e_1 f_1$ und Kraft „$+1$" in Linie $f_1 a_1$) ist zu zerlegen in Richtung $f_1 f$, $f_1 a$ und $f_1 b$; da aber diese Resultante von „$+1$" und „-1" in der durch f_1 zu fa parallel gezogenen horizontalen Linie liegt, also auch in der Ebene $f f_1 a$, erhält der dritte Stab $f_1 b$, der sich außerhalb dieser Ebene befindet, die Spannung Null. Es liegt also tatsächlich der Ausnahmefall vor und demgemäß ist das System nach Abb. 131 nicht stabil.

Wesentlich anders liegen die Verhältnisse bei einer Kuppel über regelmäßigem Vieleck mit ungerader Seitenzahl. Nachdem hier $a_1 e_1$ mit Stab $e_1 b$ vertauscht ist, erhält man vom Punkte a_1 mit beliebiger Kraft, etwa $+1$, in Richtung des fortgenommenen Stabes ausgehend, im letzten Stabe $d_1 e_1$ eine Spannung von gleicher Größe und gleichem Vorzeichen, also auch $+1$. Die Resultante von $a_1 b_1 = +1$ und $d_1 e_1 = +1$ liegt jetzt in einer horizontalen Linie, die den Winkel $d_1 e_1 a_1$ halbiert, also sich sicher nicht in der Ebene $e e_1 a$ befindet; infolgedessen läßt sich diese Resultante eindeutig in die drei Richtungen $e e_1$, $a e_1$ und $b e_1$ zerlegen, so daß also auch der Ersatzstab $e_1 b$ eine bestimmte endliche Spannung erhält.

Damit ist in der Tat auch auf diesem Wege allgemein nachgewiesen, daß eine Netzwerkkuppel über regelmäßigem Grundriß mit gerader Seitenzahl nicht stabil ist, wohl aber eine solche über regelmäßigem Vieleck mit ungerader Seiten-

zahl.[1]) Weiter läßt sich zeigen, daß auch unregelmäßige Netzwerkkuppeln dann labil sind, wenn sie $2n$ Seitenflächen besitzen und an den verschiedenen Knotenpunkten a_1, $b_1 \cdots$ die Schnittlinien der Ebenen $a a_1 b$, $b b_1 c \cdots$ mit der Ringebene $a_1 b_1 \cdots$ senkrecht zur Winkelhalbierenden von $f_1 a_1 b_1$, $a_1 b_1 c_1 \cdots$ stehen (vgl. Nr. 71).

Für Anwendung der Netzwerkkuppel ist wieder zu beachten: Bei einer Kuppel mit großer Seitenzahl ist der Unterschied zwischen einer Konstruktion mit gerader und einer solchen mit ungerader Zahl recht unbedeutend und es sind demgemäß Netzwerkkuppeln über regelmäßigem Raum mit gerader oder großer Seitenzahl zu vermeiden.[2])

Erfordert es die architektonische Form, daß eine Netzwerkkuppel über quadratischem Raum ausgeführt wird, so muß zur Erzielung der Stabilität in das obere Viereck eine Diagonale eingezogen werden, wofür dann an anderer Stelle ein Stab, bezw. ein Stützungsstab (Auflagerbedingung) entfernt werden kann. So ist z. B. das in Abb. 132 dargestellte System ein stabiles Fachwerk mit dem Aussehen der Netzwerkkuppel.[3]) Daß es stabil ist, erkennt man sofort: an den unverschieblich gelagerten Ring a, b, c, d sind die Punkte B, C, D nach dem Aufbau der Netzwerkkuppel angeschlossen, dann ist A durch drei Stäbe angefügt, die nicht in derselben Ebene liegen.

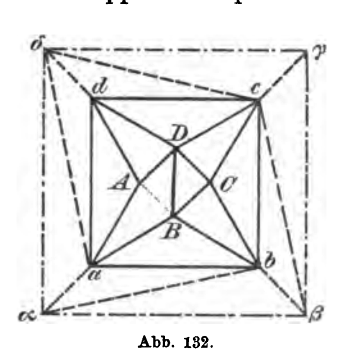


Abb. 132.

97. Die **Berechnung** der Netzwerkkuppel kann mit Hilfe der Stabvertauschung ausgeführt werden, und zwar ist hierzu — wie oben gesehen — eine einfache Stabvertauschung nötig, denn die Kuppel kann durch eine solche in ein System

[1]) Föppl, D. Fachw. i. R., S. 84.

[2]) Föppl, D. Fachw. i. R., S. 85.

[3]) Die Stützungsstäbe sind mit Rücksicht auf die Darstellung in schiefen Ebenen gedacht.

übergeführt werden, das nach dem ersten Bildungsgesetz aufgebaut ist, bei dem also die Spannungen bestimmt werden können mittels der wiederholten Lösung der Aufgabe: eine Kraft in drei Richtungen zu zerlegen, die sich nicht in einer Ebene befinden.

Eine andere Lösung gab Föppl an und zeigte damit, wie man auch bei schwierigeren Systemen durch besondere Überlegungen gut zum Ziele gelangen kann; es ist dies das Verfahren, das bereits bei entsprechend gelagerten Gerüstsystemen in Nr. 75 benützt wurde. Da es für die Raumsysteme besonders lehrreich ist, soll es hier nochmals ausführlich behandelt und auf ein Beispiel angewendet werden.

Es möge in irgend einem Punkte, z. B. V (Abb. 133), eine beliebige Last wirken. Man geht dann von einem benachbarten Knotenpunkt, z. B. IV, aus und nimmt die Spannung in V, IV ganz beliebig an, etwa als Zugspannung mit der Größe T_1. Die wirkliche Spannung S_1 sei gegeben durch $\lambda \cdot T_1$; dann sind ebenso die Spannungen der übrigen Stäbe λmal so groß als die durch T_1 hervorgerufenen. Hat man im Kräfteplan T_1 den Maßstab 1 cm $= m$ kg zu Grunde gelegt, so kann derselbe dann auch für die wirklichen Spannungen gelten, doch bedeutet jetzt 1 cm: $\lambda \cdot m$ kg. Die Aufgabe ist also jedenfalls gelöst, wenn der Wert λ gefunden ist.

Die willkürlich gewählte Kraft T_1 hat an Knotenpunkt IV Gleichgewicht zu halten mit den Kräften in $\overline{\text{IV, X}}$, $\overline{\text{IV, IX}}$ und $\overline{\text{IV, III}}$, oder, da die Resultante der beiden ersteren ihrer Richtung nach durch die Linie aa gegeben ist, muß T_1 mit Kraft in Richtung 2 und aa im Gleichgewicht stehen (Abb. 133^c). Nachdem hierdurch die Spannung in 2 (T_2) dargestellt ist, kann man zu Knotenpunkt III übergehen, stellt daselbst Gleichgewicht her zwischen T_2 und Kräften in Richtung 3 und bb, erhält wieder ein eindeutiges Kräftedreieck. In derselben Weise fährt man weiter fort und findet schließlich an I in dem durch V laufenden Stab $\overline{\text{V, I}}$ (5) eine gewisse Spannung T_5. Diese Spannung T_5 in 5 wäre sicher die richtige, wenn die von vornherein willkürlich angenommene Kraft T_1 tatsächlich die infolge

der äußeren Kraft auftretende wäre; im allgemeinen wird dies aber nicht zutreffen, sondern S_1 wie angenommen λmal so groß sein. Nun sind aber die Spannungen von 1 und 5 in demselben Maßstab aufgezeichnet worden, also das Verhältnis zwischen diesen beiden, wie überhaupt zwischen allen ermittelten Spannungen ist bereits richtig gefunden, und demgemäß kann auch die richtige Lage der Resultante der beiden wirklichen Kräfte in 1 und 5 angegeben werden durch Zeichnung des Kräfteparallelogramms von 1 und 5 (Abb. 133[c]: 5′, 1′, *hh*).

Diese richtige Lage *hh* der Resultante erlaubt nun, die wirkliche Größe derselben, damit den Faktor λ, sowie die wirklichen Spannungsgrößen S_1 usw. zu ermitteln. Nachdem man nämlich die Richtungslinie *hh* (Resultante aus 1 und 5) gefunden hat, betrachtet man den Gleichgewichtszustand an Knotenpunkt V: Kraft P, die Spannungen in $\overline{V, VI}$, $\overline{V, X}$ und die Resultante von Stabkraft 1 und 5 müssen Gleichgewicht halten. Da aber die Lage der letzteren (Linie *hh*) bekannt ist, findet man ihre Größe und diejenige der Spannungen in 6 ($\overline{V, VI}$) und 7 ($\overline{V, X}$). War etwa die Resultante von T_1 und T_5 im benützten Maßstab s cm und die nun gefundene Resultante von S_5, S_1 bei gleichem Kräftemaßstab t cm, so ist die gesuchte Größe von λ gegeben durch $\lambda = \frac{t}{s}$.

Nachdem man die Richtung *hh* der Resultante von S_1 und S_5 ermittelt hat, kann man natürlich auch einen ganz neuen Kräfteplan aufzeichnen, indem man Gleichgewicht zwischen P, den Kräften in Richtung 6, 7 und *hh* herstellt, letztere Kraft in S_1 und S_5 zerlegt, dann zu Knotenpunkt b_1 übergeht, an dem nur drei unbekannte Spannungen wirken usw. Ein derartiger Kräfteplan ist in Abb. 133[d] und [e] in Grundriß und Aufriß aufgezeichnet worden, womit die Ermittlung der Spannungen aller Kuppelstäbe erledigt ist. Benutzt wurde die Culmannsche Methode und zu diesem Zweck an Punkt V die Schnittlinie *ss* der Ebenen (P, 6) und (h, 7) verwendet. Die Grundrißspur der ersteren Ebene ist durch die Punkte VI und B (Durchdringungspunkt der Kraft P) gegeben; diejenige der letzteren

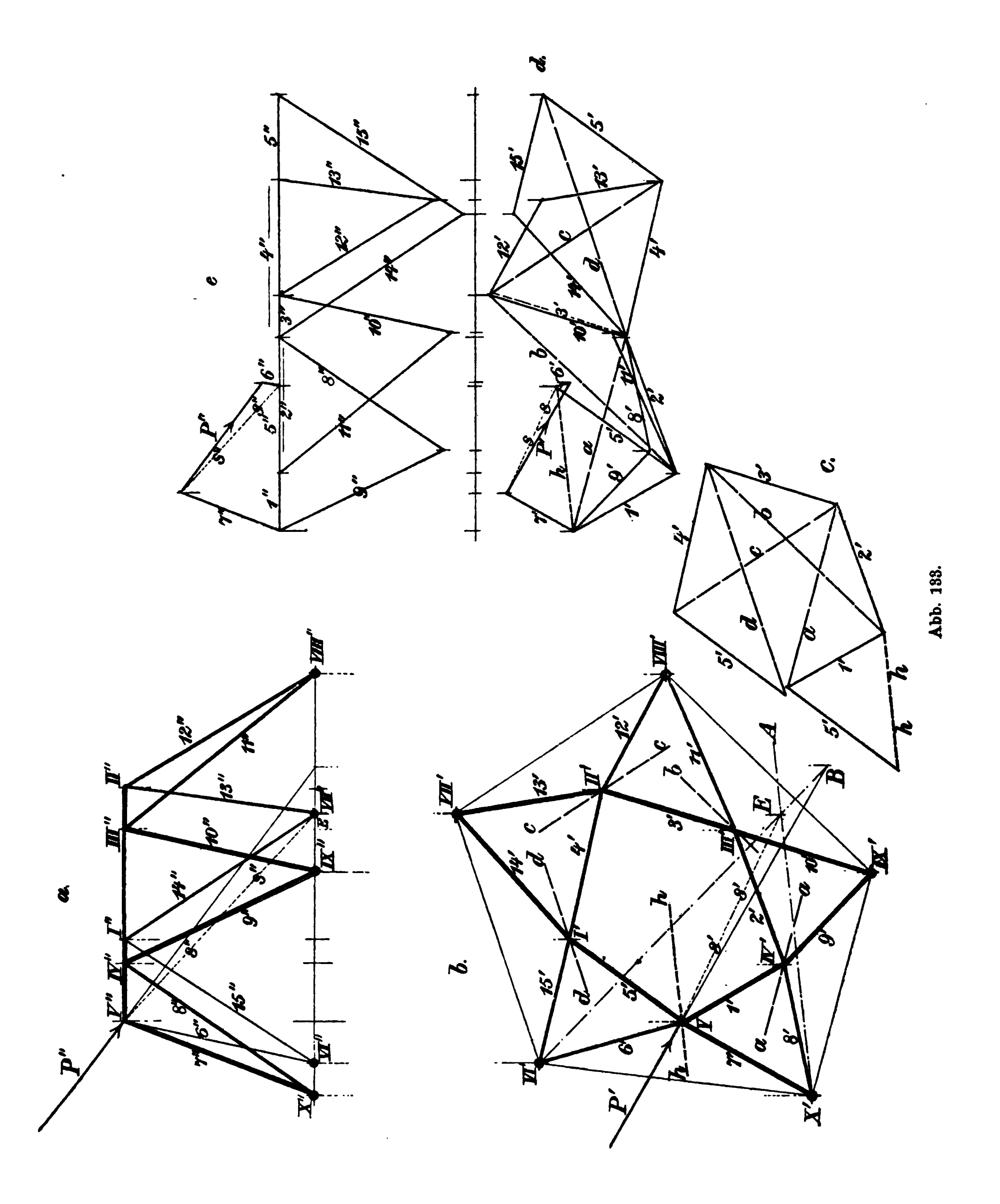


Abb. 133.

durch eine durch X parallel zu $h\,h$ gezogene Gerade. Die Verbindungslinie des Schnittpunktes E beider Grundrißspuren mit Punkt V liefert die Schnittlinie ss der Ebenen $(P, 6)$ und $(h, 7)$. Man hat jetzt zu zerlegen P in Richtung 6 und ss, dann ss in h und 7, hierauf h in 1 und 5. An den übrigen Punkten b_1, $c_1 \cdots$ gestaltet sich dann die Zerlegung wesentlich einfacher, da die Schnittlinie $a\,a$, $b\,b$, $\cdots$ von der Ebene der beiden Ringstäbe und derjenigen der beiden Gitterstäbe stets sofort anzugeben ist. Auf die Reihenfolge der Kräfte in den Kräftepolygonen wurde in der Zeichnung keine Rücksicht genommen, vielmehr diese Anordnung so getroffen, daß sie sich recht übersichtlich gestaltet. Die Auflagerkräfte können leicht gefunden werden, indem dieselben gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind den Resultanten aller an den Auflagerpunkten zusammentreffenden Kräfte (Spannungen).

Wirkt eine Reihe von Kräften, so wird man bei Verwendung dieses Verfahrens verschiedene Kräftezustände betrachten, bei denen jedesmal nur eine Einzellast wirkt, die Kräftepläne hierfür zeichnen und die für die Einzellasten ermittelten Spannungen algebraisch summieren.

98. Die Berechnung der mehrgeschossigen Netzwerkkuppel bietet nach obigen Ausführungen keine prinzipiellen Schwierigkeiten: man hat zunächst die Spannungen der Stäbe des oberen Geschosses zu bestimmen, dann an jedem Knotenpunkt des zweiten Rings die Spannungen der daselbst von oben zusammentreffenden Stäbe mit der wirkenden Last als äußere Kräfte einzuführen und nach obigen Angaben zu verfahren.

Wenn es die architektonische Ausbildung eines Turmes oder Daches erfordert, daß über der Netzwerkkuppel sich eine solche mit meridianartig verlaufenden Gratstäben erhebt, so kann auf den oberen Ring ohne weiteres eine Schwedler-Kuppel oder ein entsprechendes System aufgesetzt werden, da ja die Ringpunkte der Netzwerkkuppel (abgesehen von den erwähnten Ausnahmefällen) völlig festliegen, man sie direkt als feste Lagerpunkte für einen neuen Aufbau ansehen kann. Die Spannungsermittlung ist auf Grund der früheren Betrachtung

leicht auszuführen: Man ermittelt zunächst die Spannungen des oberen Teiles als Stabkräfte der Schwedler-Kuppel; nachdem dieselben gefunden, führt man die Spannungen der in den oberen Punkten der Netzwerkkuppel eintreffenden Stäbe als äußere Kräfte bezüglich der Netzwerkkuppel ein.

Bei Überdeckung eines quadratischen Raumes mit einer derartigen Konstruktion ist zu bedenken, daß die Netzwerkkuppel über regelmäßigem Viereck labil ist; man kann die Labilität aufheben, indem man einen Diagonalstab in dem oberen Viereck einzieht und dafür einen anderen Stab, etwa $a_1 b_1$, fortnimmt, so daß das in Abb. 134 dargestellte System entsteht. Daß ein derartiges Stabgebilde tatsächlich stabil ist, ist leicht einzusehen. Zunächst ist klar, daß es die richtige Stabzahl besitzt, da es durch einfache Stabvertauschung in ein solches übergeführt werden kann, von dem dies bereits bekannt ist (Schwedler- und Netzwerkkuppel). Diese Bedingung allein verbürgt jedoch die Stabilität noch nicht; dafür ist z. B. noch zu zeigen, daß beim Fehlen von äußeren Kräften in allen Stäben die Spannung Null eindeutig herrscht, oder daß das System durch eine richtige Stabvertauschung aus einem sicher stabilen abgeleitet werden kann. Nach ersterem Verfahren würde man die Spannung im oberen Diagonalstab zunächst beliebig als S annehmen und durch diesen Wert die Spannungen in der Schwedler-Kuppel ausdrücken, dann etwa an a_1 diejenige der drei Stäbe $a_1 d_1$, $a_1 a$, $a_1 b$, entsprechend die drei noch unbekannten Spannungen bei d_1 und c_1. An Knotenpunkt b_1 sind dann nur noch zwei unbekannte Spannungen vorhanden: $b_1 c$ und $b_1 b$; die Resultante der Spannungen der daselbst zusammentreffenden bekannten Stäbe müßte, damit beide Stäbe eindeutige Spannungen er-

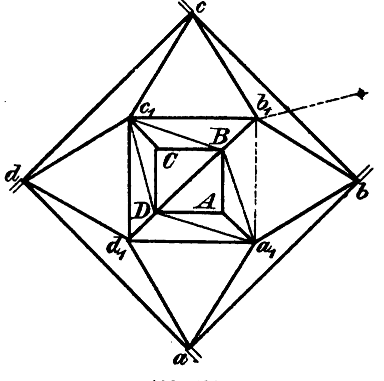


Abb. 134.

halten, in die Ebene derselben fallen, also senkrecht zur Ebene keine Komponente besitzen. Diese Bedingung liefert eine Gleichung für die zunächst willkürlich gewählte Kraft S, da ja alle Stabspannungen durch diese ausgedrückt sind; aus der Gleichung ergibt sich aber $S = 0$ und damit ist dann auch gezeigt, daß in allen Stäben die Spannung Null auftritt. Da nämlich die Spannungen der an Punkt b_1 von oben her einmündenden Stäbe Bb_1, $c_1 b_1$ eine Resultante in der Ebene $Bb_1 c_1 C$ haben, die nicht in der Schnittlinie von Ebene $Bb_1 c_1$ und $bb_1 c$ liegt, ergibt die Gleichgewichtsbedingung den Wert Null für diese Resultante.

Nach der Methode des Ersatzstabes denkt man sich das vorliegende System entstanden aus einem solchen, das an Stelle der oberen Diagonale einen von b_1 auslaufenden Stab $b_1 \beta$ besitzt; dieser letztere wäre also der Ersatzstab, der an Stelle des Tauschstabes BD tritt. Es ist nachzusehen, ob infolge $BD = 1$ in $b_1 \beta_1$ die Spannung Null auftreten kann. Das ist aber ausgeschlossen, da die Resultante der Spannungen in Bb_1 und $c_1 b_1$, wie schon oben bemerkt, nicht in die Ebene $bb_1 c$ fallen kann, und demgemäß alle drei Stäbe $b_1 c$, $b_1 b$ und $b_1 \beta$ eine bestimmte Spannung erhalten.

§ 29. Die Zimmermannsche Kuppel. Analytische Berechnung.

99. Diese Kuppel wurde von Zimmermann entworfen zur Überdachung des Sitzungssaales im Reichstagsgebäude. Die Verhältnisse lagen bei diesem Hause insofern ganz besonders,[1] als bereits die Mauern aufgeführt waren, bevor man an die Kuppel dachte, und diese infolgedessen zu schwach waren, um den bei den bisher betrachteten Kuppeln auftretenden starken Schub aufzunehmen. Es handelte sich demgemäß darum, ein Kuppelsystem zu konstruieren, bei dem keine Lager vorhanden sind, durch die die Mauer senkrecht zu ihrer Flucht beansprucht wird: Es dürfen also nur Ebenen- (Kugel-) Lager und solche

[1]) Zimmermann, Ztschr. f. Bauw. 1897. — Zentralbl. d. Bauverw. 1901, S. 201. — Über Raumfachwerke, 1901.

Kurvenlager (Rollenlager, Pendelstützen) benützt werden, die senkrecht zur Mauerflucht beweglich sind, und diese Rollenlager dürfen nicht in den Mauerecken angebracht werden. Das von Zimmermann erdachte System, das diesen verschiedenen Bedingungen gerecht wird, ist in Abb. 135 für Überdeckung eines sechseckigen Raumes dargestellt.

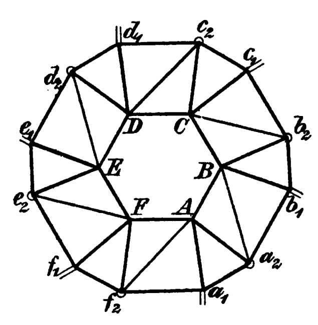


Abb. 135.

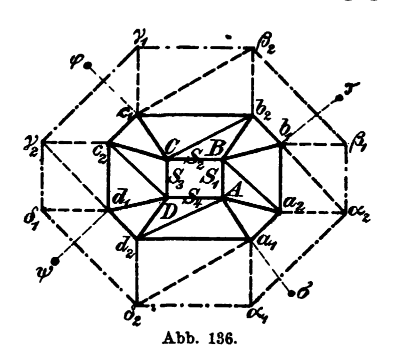
Wesentlich bei der Stabanordnung ist, daß der untere Ring doppelt soviel Knotenpunkte besitzt, als der obere; hierdurch entstehen bei einem $n$seitigen Raum n Trapezfelder, die durch je einen Diagonalstab in zwei Dreiecke zerlegt werden, und außerdem n dreieckige Felder. Daß bei der ausgeführten Zimmermannschen Kuppel die Eckabschnitte $a_1 r$, $a_2 r$[1]) usw. je einander gleich sind, ist für das Stabsystem unwesentlich. Die allgemeinste Form wird offenbar dadurch erhalten, daß man zwischen zwei Ringen, von denen der eine doppelt soviel Eckpunkte besitzt als der andere, soviel Stäbe einzieht, daß im Mantel lauter Dreiecke gebildet werden. Ein solches Stabsystem an sich ist nicht stabil; es wird es vielmehr erst durch zweckmäßige Lagerung, und zwar sind hierzu $3n$ Lagerbedingungen, also n Kugel- und n Rollenlager, notwendig, wie sich durch Nachzählen feststellen läßt oder noch einfacher auf Grund der Bildungsgesetze.

100. In Abb. 136 sind für einen rechteckigen Grundriß die Lager durch Stützungsstäbe (gestrichelt!) ersetzt; eigentlich müßten ja dieselben in vertikalen Ebenen liegen, doch sollen diese — wie dies auch schon im vorhergehenden Paragraphen durchgeführt wurde — in schiefer Ebene gedacht sein, damit man sie im Grundriß sieht; die Stabilitätsverhältnisse werden ja hierdurch nicht geändert. Werden nun die Stäbe AB, BC, CD und DA entfernt und dafür vier neue Stützungsstäbe

---

[1]) Punkt r gibt den Schnittpunkt von $a_1 f_2$ und $a_2 b_1$ an.

$a_1\sigma$, $b_1\tau$, $c_1\varphi$ und $d_1\psi$ eingezogen, so erhält man ein System, das nach dem ersten Bildungsgesetz hergestellt ist, also sicher die richtige Stabzahl besitzt: a_1, b_1, c_1, d_1 sind durch je drei Stützungsstäbe fest angeschlossen an die Erde, weiter die Punkte a_2, b_2, c_2, d_2 durch einen Stützungsstab und zwei Stäbe, und hieran angefügt die oberen Punkte durch je drei Stäbe. Da nun durch Stabvertauschung die Anzahl der Stäbe nicht geändert wird, so ist hiermit gezeigt, daß auch die Zimmermannsche Kuppel die richtige Stabzahl besitzt. Bei einiger Übung kann man diese Verhältnisse mit einem Blick übersehen.


Abb. 136.

Die Frage nach der Stabilität ist allerdings hiermit noch nicht erledigt; man müßte vielmehr zu diesem Zweck zeigen, daß durch die vorgenommene Stabvertauschung die vorher bestandene Stabilität nicht gestört wird. Nun ist aber dieser Nachweis bereits früher geführt worden: das System der Abb. 75 stellt ja nichts anderes wie die Zimmermannsche Kuppel dar, wenn das untere an und für sich schon stabile System als das Erdfachwerk angesehen wird, die davon ausgehenden Stäbe als die Stützungsstäbe und der obere Teil als das eigentliche Kuppelsystem. Bei dem Nachweis ergab sich zunächst, daß das völlig symmetrische Gebilde sicher stabil ist, da die maßgebende Determinante vierten Grades einen von Null verschiedenen Wert besaß. Wenn nun das symmetrische, regelmäßige System stabil ist, so läßt sich dies noch eher von einem unsymmetrischen erwarten. Untersucht man allgemein, unter welchen Umständen die Determinante den Wert Null erhält, so findet man, daß dies für Kuppeln der Zimmermannschen Form überhaupt nicht eintritt, daß vielmehr alsdann die Kuppel in andere Gestalt übergeht, (weiter unten wird hierauf noch eingegangen werden).

Zur Stabilitätsuntersuchung wurde hier eine Determinante vom vierten Grad benötigt, während die allgemeine Systemdeterminante vom $3n$. Grad, also 36. Grade, ist. Man kommt — wie bereits in Nr. 50 erwähnt — sogar mit einer Determinante vom zweiten Grad aus, denn durch zweimalige Stabvertauschung kann man schon ein System erhalten, dessen Spannungen sich leicht ermitteln lassen, wie im folgenden Paragraphen ausführlich gezeigt werden soll.

101. Zum Nachweis der Stabilität könnte man auch einfach darauf hinweisen, daß von Zimmermann selbst die Spannungsberechnung für ein allgemeines Lastensystem durchgeführt wurde, und daß sich hierbei eindeutige und endliche Werte ergaben. Bei dieser Berechnung stellte Zimmermann für jeden Knotenpunkt die drei allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen auf und löste die so erhaltenen $3n$ Gleichungen nach den $3n$ unbekannten Stabspannungen (Kuppel- und Auflagerstäbe). Diese mühevolle und umständliche Arbeit hat Zimmermann mit großer Gewandtheit und Übersichtlichkeit durchgeführt und gelangt so zu allgemeinen Formeln für die Stabspannungen. Er findet zunächst Gleichungen, die die verschiedenen Diagonalspannungen enthalten, wobei in jeder Gleichung drei aufeinander folgende Diagonalen vorkommen; dann sind weiter die anderen Unbekannten zu ermitteln.

102. Eine andere analytische Berechnung der Kuppel bietet wiederum die Momentenmethode, die auch auf die Zimmermannsche Kuppel zuerst von Landsberg angewendet wurde.[1]) Er ermittelt zunächst die zwölf Auflagerunbekannten, indem er außer den sechs allgemein gültigen Gleichgewichtsbedingungen noch sechs weitere durch Legung von entsprechenden Flächenschnitten aufstellt, und bekommt so zwölf Gleichungen mit zwölf Unbekannten, deren Auflösung keine besondere Schwierigkeiten bietet. Nachdem diese Lagerreaktionen gefunden sind, lassen sich durch einfache Kräftezerlegung die Spannungen in den anderen Stäben bestimmen, da an den

[1]) Zentralbl. d. Bauverw. 1903, S. 221.

Knotenpunkten, die auf Kurvenlagern gestützt sind, immer nur drei unbekannte Stabspannungen zusammenlaufen und alsdann an den anderen Unterringpunkten nur noch je zwei Unbekannte vorhanden sind, und man schließlich mittels der oberen Knotenpunkte die Spannungen in den noch fehlenden Stäben finden kann.

Die Berechnung der Auflagerkräfte möge für die einfache Kuppel über rechteckigem Raum nach Abb. 137 durchgeführt werden unter Zugrundelegung zweier allgemeiner Kräfte in den Punkten C und D, deren Komponenten mit X_C, Y_C, Z_C, X_D, Y_D, Z_D bezeichnet sind (Z nach abwärts gerichtet!). Die senkrechten Auflagerkomponenten seien mit $V_1 \cdots V_8$ (positiv nach oben) benannt, die horizontalen mit H_1, H_3, H_5, H_7. Wohl erscheint die Berechnung nicht sehr einfach, doch bietet das Resultat manches Interessante.

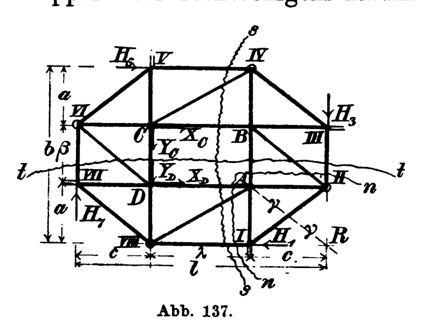


Abb. 137.

Zunächst wird ein Flächenschnitt durch sämtliche Stützungsstäbe (Auflagerbedingungen) gelegt und für die am oberen Teil angreifenden Kräfte die sechs Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt:

I. Summe der vertikalen Kräfte gleich Null:

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 = Z_C + Z_D.$$

II. Summe der Kräfte in Richtung VI, VII:

$$H_3 - H_7 + Y_C + Y_D = 0.$$

III. Summe der Kräfte in Richtung I, VIII:

$$H_5 + X_C + X_D - H_1 = 0.$$

IV. Summe der Momente um eine senkrechte Achse durch R muß verschwinden:

$$H_7 \cdot l + H_5 \cdot b + X_C \cdot (a + \beta) + X_D \cdot a \\ - (Y_C + Y_D) \cdot (\lambda + c) = 0.$$

V. Summe der Momente um die Achse II, III (wenn h die Höhe der Kuppel bedeutet):

$$(V_6 + V_7) \cdot l + (V_5 + V_8) \cdot (\lambda + c) + (V_1 + V_4) \cdot c$$
$$+ (X_C + X_D) \cdot h - (Z_C + Z_D) \cdot (\lambda + c) = 0.$$

VI. Summe der Momente um Achse I, VIII:

$$(V_4 + V_5) \cdot b + (V_6 + V_3 - Z_C) \cdot (\beta + a)$$
$$+ (V_7 + V_2 - Z_D) \cdot a + (Y_C + Y_D) \cdot h = 0.$$

Um die noch fehlenden sechs Gleichungen zu erhalten, sind nun andere Flächenschnitte einzuführen. Trennt man durch einen Flächenschnitt ss einen Kuppelteil mit den von IV, III, II, I auslaufenden Stützungsstäben ab und wählt als Momentenachse die Schnittlinie der beiden getroffenen Feldebenen, die in einer Höhe k_1 parallel zu CB läuft, wobei:

$$k_1 : h = \frac{b}{2} : a, \quad \text{also} \quad k_1 = \frac{h \cdot b}{2a}, \tag{62^a}$$

so entsteht die Momentengleichung:

VII. $$(V_4 - V_1) \cdot \frac{b}{2} + (V_3 - V_2) \cdot \frac{\beta}{2} - H_3 \cdot k_1 = 0.$$

Weiter wird der durch den Schnitt tt losgetrennte Teil ins Auge gefaßt und als Achse die Schnittlinie der nun getroffenen Feldebenen eingeführt, die in der Höhe k_2 über dem Unterring parallel zu AB verläuft, wobei:

$$k_2 = \frac{h \cdot l}{2c}; \tag{62^b}$$

es ergibt sich:

VIII. $$(V_7 - V_2) \cdot \frac{l}{2} + (V_8 - V_1) \cdot \frac{\lambda}{2} + H_1 \cdot k_2 - X_D \cdot (k_2 - h)$$
$$- Z_D \cdot \frac{\lambda}{2} = 0.$$

Wird ferner ein Flächenschnitt nn gelegt, der die Knotenpunkte A, I und II lostrennt, und als Momentenachse die Schnittlinie beider benachbarten Feldebenen IIABIII und DAIVIII eingeführt, also die Linie $\gamma\gamma$, so findet man:

$$\mu \cdot V_1 \cdot r - \mu \cdot V_2 \cdot r = 0,$$

wenn $\mu = \sin \varkappa$, wobei $\varkappa$ den Winkel zwischen V und $\gamma\gamma$ darstellt; also ist:

IX. $$V_1 = V_2.$$

Durch entsprechende Flächenschnitte an den drei anderen Eckdreiecken ergibt sich schließlich:

X. $$V_3 = V_4.$$

XI. $$V_5 = V_6.$$

XII. $$V_7 = V_8.$$

Aus diesen zwölf Gleichungen sind die zwölf Unbekannten zu bestimmen. Zunächst kann man durch zweckmäßige Kombination die sechs folgenden Gleichungen mit sechs Unbekannten erhalten:

$$V_1 + V_3 + V_5 + V_7 = \frac{Z_C + Z_D}{2} \equiv m_1, \qquad \text{(aus I und IX} \cdots \text{XII)}$$

$$a \cdot (V_1 + V_7) + (b + a + \beta) \cdot (V_3 + V_5) = Z_C \cdot (\beta + a) + Z_D \cdot a - (Y_C + Y_D) \cdot h \equiv m_2, \qquad \text{(VI, X, XI)}$$

$$c \cdot (V_1 + V_3) + (c + \lambda + l) \cdot (V_5 + V_7) = (Z_C + Z_D) \cdot (\lambda + c) - (X_C + X_D) \cdot h \equiv m_3, \qquad \text{(V, X, XI)}$$

$$(V_1 - V_7) \cdot \frac{l + \lambda}{2} - H_5 \cdot k_2 = X_C \cdot k_2 + X_D \cdot h - Z_D \cdot \frac{\lambda}{2} \equiv m_4, \qquad \text{(IX, XII, III, VIII)}$$

$$(V_3 - V_1) \cdot \frac{b + \beta}{2} - H_7 \cdot k_1 = -(Y_C + Y_D) \cdot k_1 \equiv m_5, \qquad \text{(X, VII, II)}$$

$$H_5 \cdot b + H_7 \,.\, l = (Y_C + Y_D) \cdot (\lambda + c) - X_C \cdot (a + \beta) - X_D \cdot a \equiv m_6. \qquad \text{(IV)}$$

Die rechten Seiten enthalten nur äußere Kräfte; sie mögen zur Abkürzung mit $m_1 \cdots m_6$ bezeichnet werden. Verbindet man nun die erste und dritte Gleichung der letzten Gruppe zusammen, so erhält man:

$$V_5 + V_7 = \frac{m_3 - c \cdot m_1}{l + \lambda}, \tag{63}$$

$$V_1 + V_3 = \frac{m_1 \cdot (l + \lambda + c) - m_3}{l + \lambda}; \tag{64}$$

ferner durch Verbindung der ersten und zweiten Gleichung:

$$V_1 + V_7 = \frac{m_1 \cdot (a + b + \beta) - m_2}{b + \beta}. \tag{65}$$

Weiter liefert die sechste Gleichung:

$$H_5 = \frac{m_6}{b} - H_7 \cdot \frac{l}{b}. \tag{66}$$

Werden schließlich die vierte und fünfte Gleichung benutzt und in denselben mittels der Gleichungen (65), (66) und (64) die Größen V_7, H_5 und V_3 eliminiert, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} V_1 \cdot (l + \lambda) - \frac{l + \lambda}{2\,(b + \beta)} \cdot \{m_1 \cdot (a + b + \beta) - m_2\} \\ - \frac{m_6}{b} \cdot k_2 - m_4 + H_7 \cdot \frac{l}{b} \cdot k_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

$$\left.\begin{aligned} V_1 \cdot (b + \beta) - \frac{b + \beta}{2\,(l + \lambda)} \cdot \{m_1 \cdot (l + c + \lambda) - m_3\} \\ + m_5 + H_7 \cdot k_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Aus diesen sechs Gleichungen können mit Leichtigkeit die sechs Unbekannten berechnet werden: aus (67) und (68) zunächst V_1 und H_7, dann aus (66): H_5, aus (65): V_7, aus (64): V_3 und endlich aus (63): V_5; ferner ist aus Gleichung II und III: H_3 und H_1 zu ermitteln und schließlich nach Gleichung IX ⋯ XII:

$$V_2 = V_1, \quad V_4 = V_3, \quad V_6 = V_5, \quad V_8 = V_7.$$

Wirkt etwa nur eine lotrechte Last: $Z_C = P$, so ist nach den früheren Gleichungen:

$$m_1 = \frac{P}{2}, \qquad m_4 = 0,$$

$$m_2 = P \cdot (a + \beta), \qquad m_5 = 0,$$

$$m_3 = P \cdot (c + \lambda), \qquad m_6 = 0,$$

und es findet sich auf Grund der obigen Ausführungen:

$$H_7 = \frac{P}{4} \cdot \frac{b}{l} \cdot \left\{ \frac{a \cdot (l + \lambda) - c \cdot (b + \beta)}{k_2 \cdot (b + \beta) - k_1 \cdot (l + \lambda) \cdot \frac{b}{l}} \right\}.$$

Wird der in Klammern stehende Ausdruck, der nur von der Kuppelform abhängige Größen enthält, zur Abkürzung mit M bezeichnet, also:

$$M = \frac{a \cdot (l + \lambda) - c \cdot (b + \beta)}{k_2 \cdot (b + \beta) - k_1 \cdot (l + \lambda) \cdot \frac{b}{l}} = \frac{2\,l a c \{ a \cdot (l - c) - c \cdot (b - a) \}}{a h l^2 \cdot (b - a) - c h b^2 \cdot (l - c)}, \quad (69)$$

(wenn k_2 und k_1 nach Gl. 62 eingeführt werden),

so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}
H_7 &= \frac{P}{4} \cdot \frac{b}{l} \cdot M = H_3, \\
H_5 &= -\frac{P}{4} \cdot M = H_1, \\
V_1 &= \frac{P}{4} \cdot \frac{a}{b + \beta} - \frac{k_2}{l + \lambda} \cdot \frac{P}{4} \cdot M = V_2, \\
V_3 &= \frac{P}{2} \cdot \frac{l - \lambda - c}{l + \lambda} - V_1 = V_4, \\
V_7 &= \frac{P}{4} \cdot \frac{a}{b + \beta} + \frac{k_2}{l + \lambda} \cdot \frac{P}{4} \cdot M = V_8, \\
V_5 &= \frac{P}{2} \cdot \frac{2\lambda + c}{l + \lambda} - V_7 = V_6.
\end{aligned}\right\} \quad (70)$$

Bildet man die Summe aller V, so muß man den Wert P erhalten:

$$\begin{aligned}
V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_8 &= 2\{ V_1 + V_3 + V_5 + V_7 \} \\
&= 2 \cdot \frac{P}{2} \cdot \frac{l + 2\lambda + c - \lambda - c}{l + \lambda} = P.
\end{aligned}$$

Liegt z. B. eine Kuppel vor, bei der:

$$b = 35\,m, \qquad l = 40\,m, \qquad h = 17\,m,$$
$$a = 10\,m, \qquad c = 12\,m,$$

so ist:

$$\beta = 15, \qquad \lambda = 16,$$
$$k_1 = \frac{h\,b}{2\,a} = 29{,}75, \qquad k_2 = \frac{h\,l}{2\,c} = 28{,}33,$$

und man findet:

$$M = \frac{10 \cdot 56 - 12 \cdot 50}{28{,}33 \cdot 50 - 29{,}75 \cdot 56 \cdot \frac{7}{8}} = \frac{-40}{-41{,}25} = +0{,}97,$$

$$H_8 = H_7 = \frac{P}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot 0{,}97 = 0{,}85 \cdot \frac{P}{4},$$

$$H_1 = H_5 = -0{,}97 \cdot \frac{P}{4},$$

$$V_1 = V_2 = \frac{P}{4} \cdot \frac{10}{50} - \frac{P}{4} \cdot \frac{28{,}33}{56} \cdot 0{,}97 = -0{,}29 \cdot \frac{P}{4},$$

$$V_3 = V_4 = \frac{P}{2} \cdot \frac{12}{56} + \frac{P}{4} \cdot 0{,}29 = +0{,}72 \cdot \frac{P}{4},$$

$$V_7 = V_8 = \frac{P}{4} \cdot \frac{10}{50} + \frac{P}{4} \cdot \frac{28{,}33}{56} \cdot 0{,}97 = +0{,}69 \cdot \frac{P}{4},$$

$$V_5 = V_6 = \frac{P}{2} \cdot \frac{44}{56} - 0{,}69 \cdot \frac{P}{4} = +0{,}88 \cdot \frac{P}{4}.$$

Zur Probe dient wieder: $\Sigma V = P$.

103. In allen Ausdrücken für die Lagerreaktionen V und H tritt die Größe M auf, und es können demnach die Lagerreaktionen und damit die Spannungen nur dann endliche, eindeutige Werte erhalten, wenn M nicht unendlich groß oder vieldeutig ist. Wohl bezieht sich der Ausdruck M nur auf eine einzelne senkrechte Last; aber wenn für irgend eine Belastung unendlich große Spannungen auftreten, so gilt dies von allen Belastungen, und das System ist nicht stabil. Demgemäß ist die Zimmermannsche Kuppel nur stabil, wenn M nicht unendlich groß oder vieldeutig wird. Dies ist aber scheinbar der Fall, wenn der Nenner verschwindet, also die beiden Glieder der Differenz einander gleich werden; es scheint demgemäß eine labile Form zu entstehen, wenn:

$$ahl^2(b-a) = chb^2(l-c),$$

oder wenn:

$$l = \mu \cdot b, \quad c = \mu \cdot a$$

ist, wobei μ einen Multiplikationsfaktor bedeutet. Demnach wäre z. B. eine Zimmermannsche Kuppel über quadratischem Raum, bei der gleiche Teile von den Ecken aus abgeschnitten

wurden, nicht stabil. Nun wurde aber gerade für dieses regelmäßige System (in Nr. 52) die Stabilität bewiesen! Wie entsteht denn das soeben erhaltene gerade entgegengesetzte Resultat? Die Erklärung ist dadurch gegeben, daß Zähler und Nenner von M noch einen gemeinsamen Faktor haben. Durch Reduktion erhält man:

$$M = \frac{2acl}{h \cdot \{l(b-a) - b \cdot c\}},$$

und dieser Ausdruck wird nur unendlich, wenn:

$$l \cdot (b - a) = b \cdot c$$

ist, oder:

$$c = \nu \cdot l, \quad a = b \cdot (1 - \nu).$$

Von den verschiedenen speziellen Fällen, die in diesem Gleichungspaar enthalten sind, kommt für praktische Verhältnisse nur derjenige in Betracht, daß $\nu = \frac{1}{2}$ ist, also:

$$a = \frac{b}{2}, \quad c = \frac{l}{2};$$

dann geht aber die Zimmermannsche Kuppel in eine Netzwerkkuppel über, die auf Kurvenlagern mit Gleitrichtung nach der Mitte des Rhombus ruht, und daß diese nicht stabil ist, geht aus Nr. 71 hervor.

Die weiteren Fälle, bei denen die Proportion:

$$c = \nu \cdot l, \quad a = b \cdot (1 - \nu)$$

erfüllt wird, stellen, sofern ν ein echter Bruch, Systeme dar, die überschlagene Ringe besitzen, indem entweder c oder a größer werden, als $\frac{l}{2}$ bezw. $\frac{b}{2}$; übereinander ragende Ringe entstehen, wenn $\nu > 1$. Die Werte $\nu = 0$ und $\nu = 1$ stellen sich als entsprechende Grenzfälle dar.

104. Daß die Schwedler- und Netzwerkkuppel Sonderfälle der Zimmermann-Kuppel sind, braucht wohl nicht besonders erwähnt zu werden: werden die abgeschnittenen Eckseiten zu Null, so ergibt sich eine Schwedler-Kuppel auf Kurvenlagern in der Müller-Breslauschen Anordnung; schrumpfen dagegen die längeren Seiten zusammen, so entsteht die Netzwerkkuppel.

§ 30. Zeichnerische Berechnung der Zimmermann-Kuppel. Mehrgeschossige Systeme.

105. Eine allgemeine Methode zur Berechnung der Zimmermannschen Kuppel stellt diejenige der Stabvertauschung dar. Bei dem Stabilitätsnachweis wurden vier Tauschstäbe verwendet, obwohl eine zweifache Stabvertauschung zum Ziel führt. Bei regelmäßigen Kuppelsystemen ist solch mehrfache Stabvertauschung sehr zweckmäßig, da sich die Spannungen $S'' \cdots S^{IV}$ aus S' ohne weiteres ableiten lassen; bei unregelmäßigen Kuppeln dagegen wird man die kleinstmögliche Zahl von Vertauschungen vornehmen, wie dies schon in Nr. 50 bei Angabe des Berechnungsganges geschah.

Statt der dort verwendeten störenden Stäbe können auch andere, z. B. $a_2 B$ und $a_2 b_1$, benützt werden, deren Spannungen X und Y zunächst unbekannt sind. In dem so entstandenen System sind die Spannungen aller Stäbe auszudrücken durch die wirkliche Belastung und durch X und Y. Am Knotenpunkt b_1 stoßen drei Stäbe zusammen, die nicht in einer Ebene liegen; ihre Spannungen können also bestimmt werden. Nachdem Bb_1 gefunden, liefert Knotenpunkt B die Spannungen in BA, Bb_2 und BC. Man betrachte weiter Knotenpunkt b_2; unbekannt sind an diesem die Spannungen in $b_2 C$, $b_2 c_1$, $b_2 \gamma_1$ und $b_2 \beta_2$;[1]) da aber die drei letztgenannten in einer Ebene liegen, kann man die Spannung in $b_2 C$ ermitteln. An C können hierauf die Spannungen in CD, Cc_2 und Cc_1 gefunden werden und an c_1 diejenigen in $c_1 c_2$, $c_1 \gamma_1$ und $c_1 b_2$. Man gehe nun zu Knotenpunkt b_2 zurück, der bereits benutzt wurde zur Ermittlung der Spannung in Cb_2, und kann jetzt die Spannung in $b_2 \gamma_1$ und $b_2 \beta_2$ bestimmen.

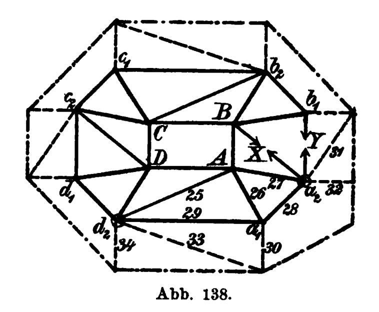


Abb. 138.

[1]) Die griechischen Buchstaben geben Punkte des strichpunktierten Rings an, die den lateinisch bezeichneten des Rings $a_1, a_2 \cdots$ entsprechen.

In entsprechender Weise ist fortzufahren: Knotenpunkt c_2 ergibt die Spannung in $c_2 D$, dann D diejenigen in $D d_1$, $D d_2$ und DA, hierauf Punkt d_1 die Kräfte in $d_1 c_2$, $d_1 \delta_1$ und $d_1 d_2$ und dann wieder Knotenpunkt c_2 die Spannungen in $c_2 \gamma_2$ und $c_2 \delta_1$; bei A kann man die Spannungen 25, 26, 27 ausdrücken, bei a_1 diejenigen in 28, 29, 30 und gelangt schließlich zu den Knotenpunkten d_2 und a_2, an denen nur noch zwei unbekannte Spannungen zusammentreffen.

An diesen Punkten sind demnach Ersatzstäbe einzufügen, und zwar so, daß diese mit den noch nicht ermittelten Stäben nicht in derselben Ebene liegen, also z. B. senkrecht zu der Ebene (31, 32) bezw. (33, 34) verlaufen. Die Bedingungen, daß in beiden Ersatzstäben die Spannung Null auftreten muß, liefern die Gleichungen zur Bestimmung der Kräfte X und Y.

Die Knotenpunkte a_2 und d_2 können aber auch wiederum direkt zur Aufstellung von Bedingungsgleichungen benutzt werden, indem bei den wirklich auftretenden Spannungen an diesen Knotenpunkten die Resultante aller bekannten Kräfte (Spannungen und Last) in die Ebene der unbekannten Stabspannungen fallen muß, also senkrecht zur Ebene $(d_2 \delta_2 a_1)$ bezw. $(a_2 \alpha_2 b_1)$ keine Komponente besitzen darf.

106. Recht einfach gestaltet sich dies letztere Verfahren, wenn nur eine Einzellast auf die Kuppel einwirkt.[1]) Dieselbe greife in A an und als störende Stäbe seien wieder $B a_2$ und $b_1 a_2$ betrachtet. Ihre Spannungen mögen zunächst willkürlich zu K_x und K_y angenommen werden, während die wirklichen Spannungen

$$X = \lambda \cdot K_x, \quad Y = \mu \cdot K_y$$

sind. Als Kräfte wirken jetzt auf das reduzierte System ein P, K_x und K_y. Man beginne nun an Knotenpunkt b_1; K_y muß im Gleichgewicht stehen mit den Spannungen in 1, 2, 3; dieselben können also dargestellt werden. An Knotenpunkt B wirkt dann K_x und die Spannung in 1, die bereits K_y enthält; man wird für diesen Knotenpunkt zwei Kräftepolygone zeichnen,

---

[1]) Föppl, D. graph. Statik, 2. Aufl., S. 318. — Zentralbl. d. Bauverw. 1901, S. 487.

einen, der dem Zustand K_y entspricht, für den also $K_x = 0$, und einen solchen, der den Zustand K_x darstellt. In gleicher Weise geht man bei allen Knotenpunkten vor: zeichnet also zwei Kräftepläne den Zuständen K_x und K_y entsprechend. Bezeichnet man die Spannung des *i*. Stabes infolge der Kraft K_x in Ba_2 mit ${}_xS_i$, diejenige infolge der Kraft K_y in a_2b_1 mit ${}_yS_i$, so ist die wirkliche Spannung

$$S_i = \lambda \cdot {}_xS_i + \mu \cdot {}_yS_i$$

für alle Stäbe, zu deren Ermittlung der Lastknotenpunkt nicht notwendig ist (da ja sonst noch ein Glied ${}_0S_i$ hinzukäme). Man wird nun in einer geschickten Reihenfolge vorgehen und so den Lastknotenpunkt erst möglichst spät berücksichtigen.

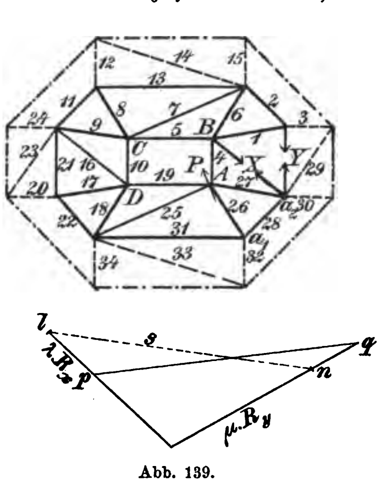


Abb. 139.

Man ermittelt demgemäß, wie auf S. 231 ausgeführt, die Spannungen der Stäbe $1 \cdots 24$, und zwar in beiden Kräfteplänen; dann weiter an d_2 die Spannung in 25 aus der Bedingung, daß Kraft in 22 und 18 (in beiden Kraftplänen!) zu zerlegen ist in Richtung 25 und die Ebene (31, 33, 34). Nun betrachte man Knotenpunkt A, an dem die Last P angreift und nur zwei unbekannte Spannungen vorhanden sind, da die Spannungen 4, 19 und 25 bereits in beiden Kräfteplänen ausgedrückt sind. Dieser Punkt wird demgemäß eine Bedingungsgleichung liefern. Damit am Knotenpunkt A Gleichgewicht herrscht, muß die Resultante der wirklichen Stabspannungen in 4, 19, 25 ($\lambda \cdot {}_xS_i + \mu \cdot {}_yS_i$!) die Wirkung der drei Kräfte P, Spannung in 26 und 27 aufheben. Zerlegt man also die Resultante der Spannungen ${}_xS_i$ in 4, 19, 25, die mit ${}_xR_a$ bezeichnet werden möge, und diejenige der Kräfte ${}_yS_i$ derselben Stäbe (${}_yR_a$) in drei Kräfte in Richtung von 26, 27 und P ($-P_x$ bezw. P_y), so muß bei richtiger Wahl von X und Y die Summe der

beiden Komponenten in Richtung von P diese wirkende Kraft selbst ergeben. Nun sind aber die eingeführten Spannungen K_x und K_y nicht die richtigen, diese sind vielmehr $X = \lambda \cdot K_x$ und $Y = \mu \cdot K_y$; es wird infolgedessen auch nicht die Summe von P_x und P_y die Kraft P liefern, sondern es wird sein:

$$\lambda \cdot P_x + \mu \cdot P_y = P, \tag{71}$$

wobei also jetzt P_x, P_y und P bekannte Größen darstellen; man hat damit eine Bedingungsgleichung für λ und μ gewonnen. Die wirklichen Spannungen in 26 und 27 sind gegeben durch

$$\lambda \cdot {}_xS_{26} + \mu \cdot {}_yS_{26} \quad \text{bezw.} \quad \lambda \cdot {}_xS_{27} + \mu \cdot {}_yS_{27},$$

wenn ${}_xS_i$ die umgekehrten Komponenten von ${}_xR_a$, ${}_yS_i$ diejenigen von ${}_yR_a$ in der i. Richtung darstellen.

Mit diesen Werten erhält man nun an a_2 in beiden Kräfteplänen die Spannungen in 28, 29, 30 und kann zu Punkt a_1 übergehen, an dem nur noch zwei unbekannte Kräfte in 31 und 32 vorhanden sind, und der demgemäß wieder eine Bedingungsgleichung liefern wird. Da an diesem Punkt keine Kraft wirkt, so muß die wirkliche Resultante von 26 und 28 in die Ebene (31, 32) fallen; also, wenn man die Kräfte $\lambda \cdot {}_xS_{26} + \mu \cdot {}_yS_{26}$ und $\lambda \cdot {}_xS_{28} + \mu \cdot {}_yS_{28}$ auf eine Linie senkrecht zur Ebene projiziert, muß sich der Wert Null ergeben; damit wird eine zweite Gleichung für die Größen λ und μ gewonnen.

Die neue Gleichung kann man auch in etwas anderer Weise finden, wie Föppl ausführte: die Resultante der wirklichen Spannungen von 31 und 32 muß mit derjenigen der wirklichen Spannungen von 26 und 28 in dieselbe Linie fallen, und zwar die Schnittlinie von Ebene (31, 32) und (26, 28). Da aber nun die Spannungswerte in 26 und 28, die man durch Addition von ${}_xS_{26} + {}_yS_{26}$ bezw. ${}_xS_{28} + {}_yS_{28}$ erhält, nicht die wirklichen Spannungen sind, so wird die Resultante dieser Spannungsgrößen auch nicht in die Schnittlinie von (31, 32) und (26, 28) fallen, sondern eine andere Richtung einnehmen. Soviel weiß man, daß die Resultante R_x von ${}_xS_{26}$ und ${}_xS_{28}$, wie auch diejenige R_y von ${}_yS_{26}$ und ${}_yS_{28}$ in die Ebene von (26, 28) fällt;

setzt man diese beiden zusammen, so ergibt sich eine Strecke, die wiederum in dieser Ebene gelegen ist, also etwa in die Linie pq (Abb. 139) fällt, aber im allgemeinen sich nicht mit der Schnittlinie ss der beiden Ebenen (31, 32) und (26, 28) deckt, wie dies bei richtiger Größe der Spannungen:

$$\lambda \cdot {}_xS_{26}, \quad \lambda \cdot {}_xS_{28}, \quad \mu \cdot {}_yS_{26}, \quad \mu \cdot {}_yS_{28}$$

der Fall sein müßte. Die wirklichen Werte der Resultante von 26 und 28 sind aber auch nicht R_x und R_y, sondern $\lambda \cdot R_x$ und $\mu \cdot R_y$. Um diese Werte zu finden, schneide man die Richtungslinien von R_x und R_y, die man vorhin gefunden hatte, durch eine Parallele zur Schnittlinie der Ebenen (26, 28) und (31, 32); wo man auch diese Linie s zieht, stets wird das Längenverhältnis $\frac{lm}{mn}$ unverändert bleiben,[1]) und es ist stets lm proportional dem richtigen Wert $\lambda \cdot R_x$ und mn der Größe $\mu \cdot R_y$, da ja diese beiden eine Resultante in Richtung ss ergeben müssen. Bezeichnet man die Konstante $\frac{lm}{mn}$, deren Wert aus der Zeichnung zu entnehmen ist, mit α, so erhält man als zweite Bedingungsgleichung für λ und μ:

$$\frac{\lambda \cdot R_x}{\mu \cdot R_y} = \alpha, \tag{72}$$

die zusammen mit Gl. (71):

$$\lambda \cdot P_x + \mu \cdot P_y = P$$

die Ermittlung der Werte λ und μ erlaubt und damit auch die Bestimmung der wirklichen Spannungen X und Y.

Man kann die Größen λ und μ als Multiplikatoren auffassen, die den Maßstab der vorher gezeichneten Kräftepläne ändern: wenn man den Kräfteplan K_x mit dem Kräftemaßstab 1 cm $= m$ kg aufgetragen hat, den Plan K_y mit 1 cm $= n$ kg, können die Kräftepläne sofort für das wirkliche X und Y benützt werden, jedoch bedeutet jetzt im Kräfteplan X: 1 cm $= \lambda \cdot m$ kg und im Plan Y: 1 cm $= \mu \cdot n$ kg. Die wirklichen Spannungen eines Stabes werden dann erhalten, indem man die Spannungs-

[1]) m ist der Schnittpunkt von R_x und R_y.

werte aus beiden Kräfteplänen unter Berücksichtigung dieses Kräftemaßstabes entnimmt und addiert.

Die Spannungen in 33 und 34 sind bis jetzt nicht erwähnt worden; sie werden sofort gefunden mittels des Knotenpunktes d_2, der schon zur Gewinnung der Spannung 25 benutzt wurde und an dem jetzt nur noch diese beiden Unbekannten vorliegen.

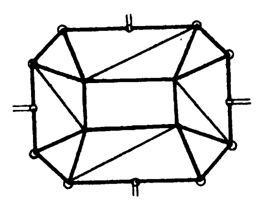
Wirkt eine Einzellast in einem anderen Knotenpunkt, so hat man entsprechend zu verfahren: zunächst diesen Punkt möglichst zu vermeiden und ihn dann zur Aufstellung der einen Bedingungsgleichung zu benützen usw.

In seiner „Graphischen Statik" hat Föppl ein derartiges Beispiel vollständig durchgeführt und so die Übersichtlichkeit dieser Lösung gezeigt. Mit Rücksicht darauf, daß dies Verfahren für die Raumfachwerke besonders lehrreich ist, wurde hier eingehender darauf eingegangen, obwohl die Berechnung der Zimmermannschen Kuppel durch die allgemeinen Formeln von Zimmermann oder die vorhin erwähnten Methoden bereits erledigt war.

107. Die Zimmermannsche Kuppel weist gegenüber den vorher gebräuchlichen Kuppeln einen wesentlichen Fortschritt auf, vor allem durch die überaus zweckmäßige Lagerung, die das Mauerwerk nur in seiner Fluchtrichtung beansprucht. Das Stabsystem stellt eine besonders steife Konstruktion dar, wie aus der Stabanordnung hervorgeht. Ein gewisser Nachteil liegt allerdings darin, daß die abgestumpften Ecken nachträglich überdeckt werden müssen, damit die Kuppel so viel Mantelflächen besitzt, wie der zu überdeckende Raum und der obere Ring Seiten hat.

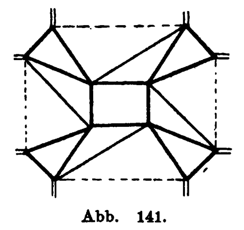
Die wirklich ausgeführte Kuppel am Reichstagsgebäude wurde nun nicht in der angegebenen Weise gelagert, sondern in etwas abgeänderter Art auf Grund der folgenden Erwägung: die wagrechte in Richtung der Mauer fallende Lagerkraft greift am Kurvenlager an, also nicht am Eck, aber auch nicht in der Mitte der Mauer. Nun wären aber die Verhältnisse am günstigsten, wenn diese Kraft in der Mitte wirkte. Zimmermann

sucht demgemäß dieselbe zu verschieben und führt dies in der Weise aus, daß er an Stelle sämtlicher erwähnten Rollenlager Flächenlager anordnet, dafür aber in der Mitte des größeren Ringstabes jedesmal ein neues Rollenlager. Berechtigt ist man hierzu, da man die senkrechte und wagrechte Reaktion des Gleitlagers trennen kann, indem man die vertikale Kraft durch ein Kugellager (an Stelle des Rollenlagers) aufnimmt, die horizontale Kraft dagegen durch ein Rollenlager an einer Stelle (z. B. in der Mitte des Ringstabs), wo kein Knotenpunkt liegt, also keine lotrechte Kraft auftritt, und demgemäß durch das Rollenlager auch nur die seitliche Kraft aufgenommen wird (Abb. 140). Die Verhältnisse im ganzen Stabsystem ändern sich bezüglich der Stabilität nicht und bezüglich der Spannungsgrößen nur insofern, als in den verschiedenen großen Unterringstäben infolge des neuen Rollenlagers auf beiden Seiten desselben verschiedene Spannungen auftreten, indem auf der einen Seite zu der gewöhnlichen Ringspannung noch die Auflagerkraft hinzukommt. Bei dieser Lagerung treten also bei $n$seitigem Grundriß (oder Oberring) $3n$ Lager auf.


Abb. 140.

Man könnte den eben entwickelten Gedanken auch auf die Schwedler-Kuppel mit Kurvenlagern (Abb. 115) anwenden und bekäme damit eine sehr zweckmäßige Lagerung.

Auch in anderer Weise läßt sich eine günstige Verteilung der Lagerkräfte erreichen, indem man n Unterringstäbe entfernt und dafür die n Kugellager der Abb. 137 in Rollenlager verwandelt (Abb. 141).[1])

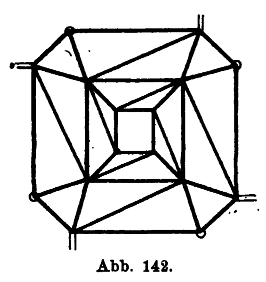

Abb. 141.

Die wesentliche Idee, die der Stabanordnung der Zimmermann-Kuppel zu Grunde liegt, kann man auch auf andere Raumfachwerke anwenden, indem man

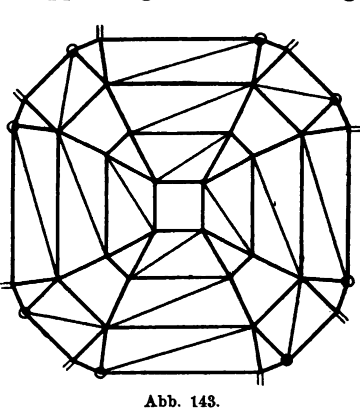
[1]) Vgl. Mohr, Abhdlgn. a. d. Geb. d. techn. Mech., S. 439.

bestimmte Spezialisierungen vornimmt; so entstehen z. B. die sogenannten Firstfachwerke, auf die Zimmermann in seinem Buche eingeht.

108. In welcher Weise werden nun bei der Zimmermannschen Stabanordnung mehrgeschossige Kuppeln gewonnen? Das kann zunächst einmal in der Weise geschehen, daß man auf den oberen Ring eine Schwedler-Kuppel aufsetzt (Abb. 142). Daß dies zulässig, ist klar, da ja infolge der Stabilität der Zimmermann-Kuppel die oberen Punkte völlig fest liegen. Der Gedanke, in dieser Weise vorzugehen, liegt sehr nahe, indem kaum ein Grund vorhanden ist, für das obere Geschoß wieder das gerade nicht einfache Zimmermannsche System zu verwenden, nachdem man im unteren Geschoß die günstige Lagerung erreicht hat. Die Berechnung einer solchen Anordnung geschieht in einfachster Weise, indem man zunächst die Spannungen in sämtlichen Stäben der Schwedler-Kuppel berechnet, und dann die Spannungen der am oberen Ring des unteren Geschosses zusammentreffenden Stäbe als äußere Kräfte einführt.


Abb. 142.

Zimmermann hat für die Herstellung der mehrgeschossigen Kuppel folgenden Gedankengang verwendet: die oberen Punkte der eingeschossigen Kuppel liegen völlig fest; man kann sie geradezu als feste Erdpunkte auffassen, auf ihnen eine neue Zimmermannsche Kuppel lagern. Statt dies nun mittels der gewöhnlichen Auflager auszuführen, kann man die Stützungsstäbe benützen und erhält demgemäß auf dem unteren Geschoß zunächst ein Stützengeschoß und auf diesem wieder ein richtiges Kuppelgeschoß


Abb. 143.

(Abb. 143); die Stützungsstäbe brauchen natürlich nicht in senkrechten Ebenen zu liegen. Bei dieser Anordnung wird beim untersten Geschoß der untere Ring doppelt soviel Ecken besitzen müssen, als der untere Ring des obersten Geschosses; für viereckigen Raum besitzt demgemäß der Lagerring 16 Ecken. Die Berechnung einer derartigen Kuppel ist durch diejenige der eingeschossigen Kuppel erledigt: man ermittelt zuerst die Spannungen der oberen Kuppel inklusive der Stützungsstäbe und führt letztere Spannungen als äußere Kräfte bezüglich des unteren Geschosses ein.

In den späteren Paragraphen werden Kuppelformen angegeben, die ebenfalls der Forderung genügen, daß die Mauer nur von Lagerkräften in ihrer Fluchtebene (wagrecht und senkrecht) beansprucht wird, die aber auch nur soviel Mantelflächen besitzen, wie der zu überdeckende Raum Seiten hat, also den Nachteil der nachträglichen Eckkonstruktion, wie dies bei der Zimmermann-Kuppel nötig ist, vermeiden. Bevor auf diese Systeme eingegangen wird, sollen zunächst allgemeine Betrachtungen und Sätze vorausgestellt werden.

Siebentes Kapitel.

Allgemeine Betrachtungen über räumliche Dachsysteme. Herstellung neuer Kuppeln (Scheibenkuppel).

§ 31. Allgemeines über Kuppelsysteme.

109. Es wurde früher auf das „erweiterte System“ hingewiesen und der Satz erwähnt: Jedes gestützte stabile System ergibt auch ein stabiles erweitertes System und umgekehrt. Um nun die Stabilität irgend eines Raumfachwerks zu untersuchen, kann man demgemäß die Stabilität des betreffenden erweiterten Systems betrachten, das dadurch entsteht, daß an die Stelle der Auflager die Stützungsstäbe treten, und die Erde durch das Erdfachwerk ersetzt wird, von dessen Knotenpunkten die Stützungsstäbe auslaufen.

Es wurde schon betont, daß ein derartiges erweitertes System in einfachster Weise auf zweierlei Art entstehen kann: entweder wird ausgehend von dem Erdfachwerk je ein Punkt durch drei Stäbe angeschlossen und dadurch Stützengeschoß und Kuppel erhalten; oder es wird ein freies, stabiles System durch sechs Stäbe in allgemeiner Lage mit dem Erdfachwerk verbunden. Aus den auf diese Weise entstandenen Systemen können durch sachgemäße Stabvertauschungen die verschiedenartigsten Raumfachwerke abgeleitet werden.

Die in Abb. 144 dargestellte vierseitige Schwedler-Kuppel ist z. B. nach dem ersten Gesetz aufgebaut; man kann sie aber auch so entstanden denken, daß ein entsprechend gebildetes

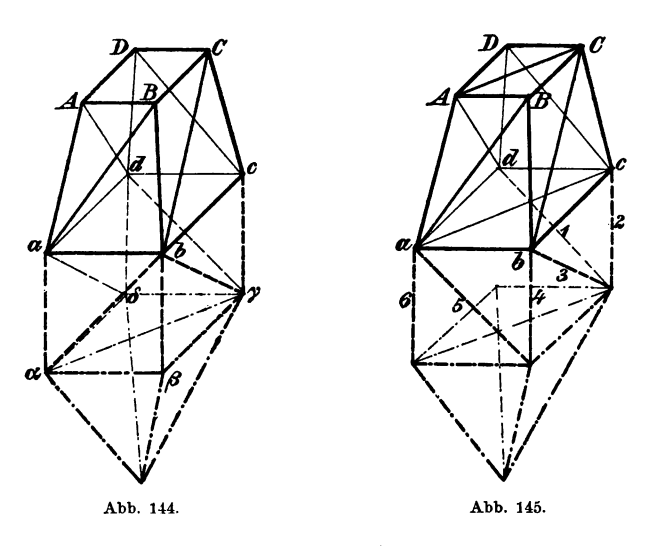


Abb. 144. Abb. 145.

freies Flechtwerk (Abb. 145) durch sechs Stützungsstäbe mit der Erde verbunden und alsdann eine Stabvertauschung zwischen den zwei Diagonalen ac, AC und zwei Stützungsstäben vorgenommen wird. Durch weitere Stabvertauschungen kann eine Kuppel mit Müller-Breslauscher Lagerung, oder eine solche mit festen Lagern, ohne Lagerring, erhalten werden (Nr. 68, 80).

Damit bei den Stabvertauschungen ein erweitertes Fachwerk erhalten bleibt, dürfen diese nur zwischen Kuppel- und

Stützungsstäben vorgenommen werden, also nur zwischen Stäben des oberen Teiles (d. i. oberhalb des Erdfachwerks); denn werden Vertauschungen zwischen Stäben dieses oberen Teiles und des Erdfachwerks ausgeführt, so ist letzteres, falls in ihm ein Stab entfernt wird, nicht mehr stabil, kann also nicht mehr die starre Erde ersetzen, oder aber es wird statisch überbestimmt (unbestimmt), wenn ihm ein Stab zugefügt wird, und dann hat ja der obere Teil nicht mehr $3n$ Stäbe (Kuppel- plus Stützungsstäbe!), ist also für sich nicht mehr stabil! Wenn nun aber auch bei der ersterwähnten Vertauschung zwischen Stäben des oberen und des Erdfachwerkteils das erweiterte System nicht erhalten bleibt, so stellt das neu entstandene Gebilde doch immer noch ein Raumsystem mit der richtigen Stabzahl dar, das als Ganzes betrachtet wohl stabil sein kann. Daß die richtige Stabzahl vorhanden ist, geht daraus hervor, daß das erweiterte System dieselbe sicher besaß; as ganze System enthält also

$$S = 3N - 6$$

Stäbe, wenn N die Gesamtzahl der Knotenpunkte angibt.

110. Man kann nun diese Stabvertauschungen so wählen, daß aus dem erweiterten System ein Flechtwerk entsteht: man braucht zu diesem Zweck in Abb. 144 nur die untere Diagonale $\alpha\gamma$ zu vertauschen mit einer Diagonale des oberen Vierecks, z. B. AC. Das so gewonnene System Abb. 146[1]) ist auf allen Seiten von Dreiecken begrenzt, stellt also ein Flechtwerk dar, das wegen seiner Bedeutung für Kuppeln und Dachfachwerke kurz als „Kuppelflechtwerk“ bezeichnet werden soll.[2])

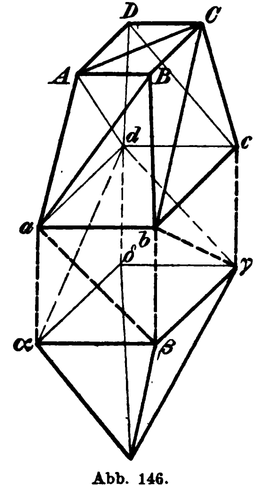


Abb. 146.

[1]) Daß der Stab $a\beta$ statt $b\alpha$ (Abb. 144) eingezogen, ist von keiner Bedeutung.

[2]) Vgl. Schlink, Ztschr. f. Arch. u. Ingw. 1904, S. 183.

Den letzten Gedankengang umkehrend, kann man aussprechen:

Aus jedem Flechtwerk kann man durch Stabvertauschung ein gestütztes Raumsystem ableiten, indem man den unteren Teil des Flechtwerks für sich in ein starres System verwandelt durch Einfügung von Stäben, die dem oberen Teil entnommen werden, der sich aus dem späteren eigentlichen Kuppelsystem und den Stützungsstäben zusammensetzt.

Will man bei einem beliebigen Raumsystem, speziell einer Kuppel, die Stabvertauschung zur Stabilitätsuntersuchung verwenden, so kann dies also in dreifacher Art geschehen:

Man verwandelt den räumlichen Fachwerksträger in ein erweitertes System und sieht nach, ob dasselbe durch richtige Stabvertauschung abzuleiten ist:

1. aus einem erweiterten System, das durch Anschluß der verschiedenen Knotenpunkte mittels je dreier Stäbe, ausgehend vom Erdfachwerk, gebildet ist; oder
2. aus einem erweiterten System, bei dem ein freies, stabiles System durch sechs Stäbe in allgemeiner Lage mit dem Erdfachwerk verbunden ist;
3. aus einem sicher stabilen Flechtwerk (Kuppelflechtwerk).

Umgekehrt hat man so eine dreifache Möglichkeit zur Herstellung von Kuppeln aus sicher stabilen Systemen.

111. Die beiden ersten Verfahren wurden schon angewendet, das dritte möge nun an einigen der vorhergehend erwähnten Kuppeln gezeigt werden. Wie schon bei diesen bemerkt wurde, ist natürlich die Stabvertauschung überhaupt nicht nötig zur Stabilitätsuntersuchung, sondern diese kann in anderer Weise geschehen. Da aber das Kuppelflechtwerk für manche Zwecke gute Dienste leistet, soll hier darauf eingegangen werden. Es gestattet vor allem, sehr rasch zu übersehen, ob ein System die richtige Stabzahl hat.

Das Flechtwerk der sechsseitigen Schwedler-Kuppel ist in Abb. 147 gegeben; in der Fläche $abcdek$ und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varkappa$ hat es keine Diagonalen, da die Stäbe beim Flechtwerk nur in den

Mantelflächen verteilt sein dürfen. Es besitzt als Flechtwerk sicher die richtige Anzahl von Stäben. Werden nun die drei obersten Stäbe AC, CE, EA entfernt, dafür die drei Diagonalen $\alpha\gamma$, $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\alpha$ eingezogen, so wird ein erweitertes System erhalten (da der untere Teil für sich starr ist), das wieder die richtige Stabzahl besitzt, d. h. es hat der obere Teil für sich diejenige Stabzahl, die zum festen Anschluß der oberen Punkte an den unteren stabilen Teil nötig ist. Es stellt demgemäß der obere Teil ein gestütztes System mit der notwendigen Stabzahl dar. Da dieser so gewonnene Raumträger nach Nr. 80 stabil ist, können also die oberen Diagonalstäbe des Kuppelflechtwerks mit solchen in der Grundfläche $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varkappa$ vertauscht werden, ohne die Stabilität zu stören.

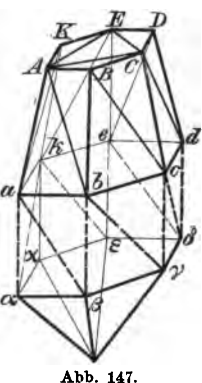


Abb. 147.

Für viele Untersuchungen ist es zweckmäßig, das Erdfachwerk, wie eben durchgeführt, als eine Pyramide mit in die Grundfläche eingezogenen Diagonalen darzustellen, deren Seitenzahl übereinstimmt mit derjenigen des unteren Kuppelrings. Bei dem betreffenden Kuppelflechtwerk fehlen dann die Diagonalen in der Pyramidengrundfläche, sind dafür in der obersten Ringfläche vorhanden. In den meisten Abbildungen ist nur der Grundriß der Kuppel gezeichnet, wobei dann die Stützungsstäbe in schiefer Ebene liegend angenommen sind, um sie sichtbar zu machen. Soll nun der untere Teil ein Erdfachwerk darstellen, sind also die Diagonalen vorhanden, so ist der Umriß der Fläche strichpunktiert, aber diese Diagonalen sind der Übersichtlichkeit wegen nicht eingetragen; sind jedoch die Diagonalen n i c h t vorhanden, so ist die Umgrenzung der Pyramidengrundfläche ausgezogen. Die Pyramide selbst wurde in den Zeichnungen ebenfalls fortgelassen; man hat sie sich also stets zugefügt zu denken. Abb. 148 stellt demgemäß das erweiterte System für eine vierseitige S c h w e d l e r-Kuppel dar.

Man erkennt ganz allgemein, daß bei einer $n$seitigen Schwedler-Kuppel, sofern ein Unterring vorhanden ist, $2n$ Stützungsstäbe notwendig sind; ein Resultat, das schon in § 24 gewonnen wurde. Dieses Resultat muß natürlich auch erhalten werden, wenn statt der $n$seitigen Pyramide eine mehr-

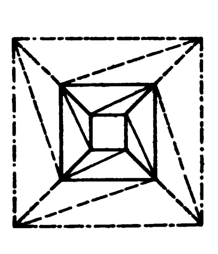


Abb. 148.

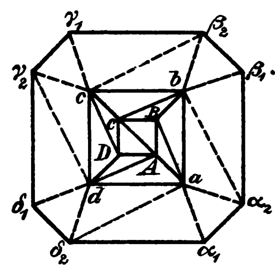


Abb. 149.

seitige eingeführt wird. Es stellt z. B. Abb. 149 das Kuppelflechtwerk einer vierseitigen Schwedler-Kuppel dar unter Annahme einer achtseitigen Erdpyramide. Um dasselbe in das erweiterte System umzuwandeln, muß auch die Pyramidengrundfläche in Dreiecke eingeteilt werden, d. h. es sind in dieselbe fünf Diagonalen einzuziehen. Es sind demgemäß in dem oberen Teil (Kuppel- plus Stützungsstäbe) fünf Stäbe zu entfernen, als welche die oberste Diagonale und die vier Stäbe $a\alpha_2$, $b\beta_2$, $c\gamma_2$ und $d\delta_2$ benützt werden können. Man kommt so auf die gewöhnliche Lagerung. Würde man statt der erwähnten vier Stützungsstäbe die Stäbe $b\alpha_2$, $c\beta_2$, $d\gamma_2$ und $a\delta_2$ fortnehmen, so erhielte man ein System, das nach Nr. 81 nicht mehr stabil ist, wohl aber die richtige Stabzahl besitzt.

112. Man erkennt aus diesen Bemerkungen, daß das Kuppelflechtwerk das Nachzählen der Stabzahl entbehrlich macht, daß man jedoch mit der Folgerung für Stabilität des aus ihm gewonnenen erweiterten Systems vorsichtig sein muß, da durch die notwendigen Stabvertauschungen leicht labile Systeme entstehen. Jedenfalls bietet das Kuppelflechtwerk den Vorteil, daß man für eine ganz beliebig vorliegende Kuppelform sofort angeben kann, wieviel Stützungsstäbe zur stabilen

Lagerung notwendig sind. Zu diesem Zweck hat man gemäß den vorhergehenden Ausführungen das gegebene freie Stabsystem zu einem Kuppelflechtwerk zu erweitern und hierauf eine Stabvertauschung in der Weise vorzunehmen, daß der untere Teil für sich stabil ist; die Stäbe zwischen diesem Teil und dem gegebenen Kuppelsystem sind dann die Stützungsstäbe.

Um z. B. die Frage nach Lagerung der Zimmermannschen Kuppel zu beantworten, gehe man etwa von dem Kuppelflechtwerk, Abb. 150, aus. Zur Herstellung des erweiterten Systems müssen in die untere achtseitige Grundfläche die fünf Diagonalen eingezogen werden; also sind aus dem oberen Teil fünf Stäbe zu entfernen: die oberste Diagonale AC und vier spätere Stützungsstäbe, etwa $a_1\alpha_2$, $b_1\beta_2$, $c_1\gamma_2$ und $d_1\delta_2$, so daß von den 16 Stützungsstäben nur noch zwölf übrig bleiben, die bei dieser Anordnung vier Rollenlagern und vier Kugellagern entsprechen. So gelangt man tatsächlich auf die Zimmermannsche Kuppel.

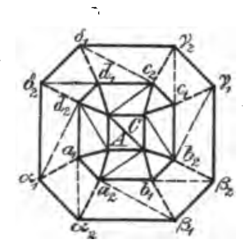


Abb. 150.

Als weiteres Beispiel diene das in Abb. 151 ausgezogene Kuppelsystem; wie kann dasselbe gelagert werden, damit es einen stabilen Raumträger ergibt? Die einzuführende Pyramide möge zur Abwechslung angenommen werden mit der Seitenzahl des Oberrings der Kuppel, also vierseitig. Mit dieser wird das Kuppelflechtwerk hergestellt, das 16 spätere Stützungsstäbe besitzt, und sicher stabil ist. Wird nun die Diagonale AC fortgenommen und dafür etwa $\alpha\gamma$ eingezogen, so entsteht ein erweitertes System, da der untere Teil für sich stabil ist (Abb. 151). Die Anzahl der Stützungsstäbe ist also 16, d. h. das gegebene Stabsystem benötigt zur stabilen Lagerung vier Rollenlager und acht Kugellager.

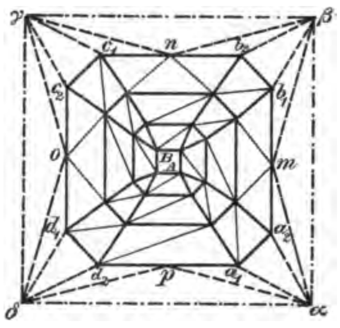


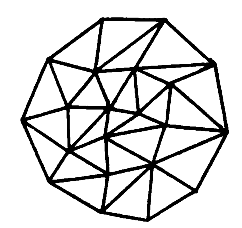
Abb. 151.

§ 32. Allgemeine Formeln für die Anzahl der Lager.

113. Die seither betrachteten Systeme hatten das Gemeinschaftliche, daß sie oben und unten von einem Ring (mit m bezw. n Ecken) begrenzt waren, während zwischen diesen im Mantel lauter Dreiecke lagen; solche Flechtwerksteile führen den Namen offene Flechtwerksteile, bezw. wenn sie stabil gestützt sind, offene Kuppeln. Den Gegensatz bilden die geschlossenen Flechtwerksteile (geschlossene Kuppeln), bei denen sich oberhalb des offenen Rings lauter Stabdreiecke befinden, z. B. im oberen Ring noch $(m-3)$ Diagonalen eingezogen sind. Man kann also sagen:

Als Grundform eines offenen Flechtwerksteiles (offene Kuppel) kann ein Stabsystem angesehen werden, das von einem oberen und unteren Ring mit m bezw. n Knotenpunkten und dazwischen von einem Mantel begrenzt ist, der aus lauter Dreiecken besteht (Abb. 152). Ein geschlossener Flechtwerksteil (geschlossene Kuppel) ist entweder im Mantel geradeso


Abb. 152.


Abb. 153.

gebildet, besitzt aber $(m-3)$ Diagonalen im oberen Ring, oder hat nur den unteren Ring und darüber einen Mantel, aus lauter Stabdreiecken bestehend (Abb. 153). Wie im übrigen die Stabanordnung auf dem Mantel ist, hat keine Bedeutung; auch brauchen die Stäbe eines Rings nicht in derselben Ebene zu liegen.

Wieviel Lagerbedingungen sind nun allgemein nötig, um einen offenen Flechtwerksteil mit einem $n$seitigen unteren Ring,

der für sich nicht stabil ist, sicher zu stützen, so daß also eine stabile offene Kuppel entsteht? Man erweitere zur Beantwortung der Frage das Stabsystem zu einem Flechtwerk, wobei man der Einfachheit halber der Ergänzungspyramide soviel Seitenflächen gibt, als der untere Ring Ecken besitzt, d. i. n. Man fügt also innerhalb des oberen Rings $(m-3)$ Diagonalstäbe ein und hat zwischen dem unteren Ring und der Pyramidengrundfläche soviel Stäbe einzuziehen, daß lauter Dreiecke entstehen, also $2n$ Stäbe, die im späteren Stützengeschoß liegen. Das so gewonnene Raumsystem (z. B. Abb. 147), das als Flechtwerk sicher die richtige Stabzahl besitzt, wird nun dadurch in ein erweitertes System verwandelt, daß dem oberen Teil soviel Stäbe entnommen und in den unteren eingezogen werden, daß letzterer für sich ein starres Gebilde, das Erdfachwerk, darstellt. Zu diesem Zweck sind in die Fläche $\alpha\beta\gamma\cdots$, die ja n Seiten besitzt, $(n-3)$ Diagonalen einzuziehen; also sind $(n-3)$ Stäbe aus dem oberen Teile zu entfernen. Als solche wähle man zunächst die $(m-3)$ Diagonalen der oberen Fläche $AB\cdots$, die ja bei der offenen Kuppel nicht vorhanden sein dürfen, und die noch fehlenden Stäbe entnehme man den Stützungsstäben; es sind also

$$(n-3)-(m-3)=n-m$$

Stützungsstäbe zu entfernen und es verbleiben demgemäß im erweiterten System an Stützungsstäben noch:

$$r=2n-(n-m)=n+m. \tag{73}$$

Man hat damit das allgemeine, sehr wichtige Resultat gewonnen: Ein System, das von einem unteren Ring mit n und einem oberen mit m Knotenpunkten und dazwischen von lauter Dreiecken begrenzt ist, ist an und für sich nicht starr, wird es vielmehr erst durch seine Lagerung und bedarf hierzu $(n+m)$ Stützungsstäbe, oder, wenn es in allen Unterringpunkten beweglich gestützt wird, m Rollenlager und $(n-m)$ Kugellager.[1]

[1]) Schlink, Ztschr. f. Arch. u. Ingw. 1904, S. 183.

Der letzte Zusatz ist ohne weiteres klar, da ja ein Rollenlager zwei Stützungsstäben, ein Kugellager einem Stab entspricht, so daß die Lager

$$2 \cdot m + (n - m) = n + m$$

Stützungsstäbe ergeben.

Der Beweis für die Richtigkeit der Formel (73) läßt sich übrigens auch leicht in anderer Weise führen. Man denke sich den gegebenen, offenen Flechtwerksteil für sich in ein vollständiges Flechtwerk verwandelt, indem man in den oberen Ring $(m - 3)$ Diagonalstäbe einzieht, in den unteren $(n - 3)$. Das so erhaltene System hat als Flechtwerk zur stabilen Lagerung sechs Stützungsstäbe nötig. Nach Anbringung derselben entsteht ein erweitertes System. Da nun bei der gewünschten Kuppel die Diagonalstäbe innerhalb des unteren und oberen Rings fehlen sollen, nimmt man eine Stabvertauschung vor: entfernt diese $(m + n - 6)$ Diagonalstäbe und fügt dafür eine gleiche Zahl Stützungsstäbe ein. Man erhält demgemäß als Zahl der alsdann nötigen Lagerstäbe:

$$r = 6 + (m + n - 6) = m + n.$$

Es ist natürlich nicht nötig, einen Flechtwerksteil gerade in den n unteren Punkten zu stützen; es können allgemein die Lagerbedingungen anders verteilt werden, aber diese Lagerung ist als die günstigste anzusehen.

114. Erwähnenswert ist der Fall, daß der untere Ring weniger Knotenpunkte besitzt, als der obere, also $m > n$. Dann ist $m + n > 2n$, also müssen bei der Lagerung in den Punkten des Unterrings nicht nur Rollenlager, sondern auch feste Auflager auftreten. Es sind jetzt $(m - n)$ feste Lager notwendig und

$$n - (m - n) = 2n - m$$

Kurvenlager;[1]) denn diese Lager ergeben zusammen:

---

[1]) Natürlich könnten auch Kugellager verwendet werden, indem für jedes statt eines Rollenlagers neu hinzugekommene feste Lager statt eines anderen Rollenlagers ein Kugellager einzutreten hat. — Wenn $m > 2n$, dann muß das System außer in den Unterringpunkten noch in weiteren Knotenpunkten gelagert werden.

$$3m - 3n + 4n - 2m = m + n$$

Stützungsstäbe, wie verlangt. Obiger Satz wäre demgemäß folgendermaßen zu erweitern:

Ein offener Flechtwerksteil mit m oberen und n unteren Knotenpunkten, der in den letzteren gelagert werden soll, bedarf zur stabilen Stützung m Rollen- und $(n - m)$ Kugellager, sofern $m < n$, dagegen $(m - n)$ feste und $(2n - m)$ Rollenlager, wenn $m > n$.

Es ist infolgedessen nicht möglich, ein derartiges System, dessen oberer Ring die größere Knotenpunktsanzahl besitzt, in dem unteren Ring so zu lagern, daß jede Mauer durch die auf ihr ruhenden Lager nur in ihrer Ebene beansprucht wird; wohl aber ist dies immer bei einem offenen Flechtwerksteil möglich, dessen Unterring die gleiche oder eine größere Seitenzahl besitzt, als der obere. Für die ersteren Systeme kann diese zweckmäßige Lagerung erreicht werden, wenn der obere Ring gestützt wird. Stabanordnungen, für die $m > n$ ist, kommen in der Praxis kaum vor, aber möglich wäre ihre Verwendung immerhin.

115. Bei den geschlossenen Kuppeln liegen die Verhältnisse anders: um das aus dem geschlossenen Flechtwerksteil gewonnene Kuppelflechtwerk in ein erweitertes System zu verwandeln, dürfen nur Stützungsstäbe aus dem oberen Teile entfernt werden, also sind die in der Pyramidengrundfläche nötigen $(n - 3)$ Stäbe den $2n$ Stützungsstäben zu entnehmen, und es verbleiben demnach an Stützungsstäben noch

$$r = 2n - (n - 3) = n + 3, \tag{74}$$

d. h.: ein geschlossener Flechtwerksteil bedarf, damit ein stabiler Raumträger entsteht, $(n + 3)$ Stützungsstäbe, oder bei der Lagerung in allen Ringpunkten drei Rollenlager und $(n - 3)$ Kugellager.

Daß sich dies Resultat ergeben mußte, ist selbstverständlich, da jede geschlossene Kuppel aufgefaßt werden kann als eine offene, deren oberer Ring nur dreiseitig ist. Man erkennt

hieraus, daß auch die geschlossenen Kuppeln immer so gelagert werden können, daß nur Kugel- und Gleitlager nötig sind.

116. Im allgemeinen können natürlich noch Stabvertauschungen eintreten zwischen Stäben des eigentlichen Kuppelsystems und Stützungsstäben. Ordnet man diese neuen Stützungsstäbe von denjenigen Unterringpunkten ausgehend an, von denen die einzelnen Stützungsstäbe auslaufen, so ergibt sich, daß für jeden im Kuppelteil fortgenommenen Stab an die Stelle eines Kugellagers ein Rollenlager eingeführt werden kann.

Mit Hilfe dieser Sätze erspart man sich das Nachzählen der Anzahl von Stäben und Auflagerbedingungen und kann auf den ersten Blick erkennen, ob ein vorliegendes gestütztes Kuppelsystem die richtige Anzahl von Stäben hat, oder nicht. Ihre Anwendung kommt natürlich nur für solche Systeme in Betracht, deren Stäbe alle oder doch zum größten Teil auf der Mantelfläche verteilt sind, also gerade für Kuppeln, und, wie später gezeigt wird, für solche räumliche Dachfachwerke, bei denen im Innern der Dachflächen keine Stäbe vorhanden, und die in allen Unterringpunkten gestützt sind.

Wendet man die erhaltenen allgemeinen Sätze auf die seither betrachteten Kuppeln an, so erkennt man sofort ihre große Wichtigkeit. Das Stabsystem der Schwedler-Kuppel mit Unterring stellt einen offenen Flechtwerksteil dar mit $m = n$ Ringpunkten; zur stabilen Lagerung in allen Unterringpunkten sind demnach nötig

$$m = n \text{ Rollenlager und}$$
$$n - m = 0 \text{ Ebenenlager,}$$

d. h. es sind nur Kurvenlager anzuordnen. Das Zimmermannsche Kuppelsystem besitzt im Unterring doppelt soviel Seiten, als der Oberring: $n = 2m$; zur sicheren Lagerung sind demgemäß anzubringen

$$m \text{ Rollenlager und}$$
$$n - m = 2m - m = m \text{ Kugellager.}$$

Bei dem Gebilde nach Abb. 151 besitzt der Oberring vier, der Unterring zwölf Knotenpunkte und der Mantel ist von lauter Stabdreiecken gebildet; nach dem allgemeinen Satz ist der Unterring zu stützen auf $m = 4$ Rollenlagern und $12 - 4 = 8$ Kugellagern.

117. Bei den seitherigen Ausführungen wurde nur von offenen und geschlossenen Flechtwerksteilen zur Herstellung der Kuppeln gesprochen. Es liegt diesen Betrachtungen ein Flechtwerk zu Grunde, das einen einfach zusammenhängenden Raum umschließt. Gerade so gut können nun auch mehrfache Flechtwerke zur Gewinnung von gestützten Systemen benützt werden, indem das betreffende Flechtwerk (Abb. 84 und 85) derartig durch einen Flächenschnitt geteilt wird, daß ein Flechtwerksteil entsteht, der einen äußeren Ring mit n Knotenpunkten und μ innere Öffnungen mit $m_1, m_2 \cdots m_\mu$ Ecken besitzt, während im übrigen die Form des Mantels ganz willkürlich ist, aber lauter Stabdreiecke enthält. Wieviel Stützungsstäbe sind nun notwendig, um einen derartigen Flechtwerksteil zu lagern?

Man kann diese Frage leicht erledigen, indem man ein derartiges System durch Einfügung entsprechender Stäbe in den μ Öffnungen in einen geschlossenen Flechtwerksteil überführt. Zu diesem Zweck sind in die Öffnungen $(m_1 - 3)$, bezw. $(m_2 - 3)$ usw., allgemein $(m_i - 3)$ Diagonalen einzufügen, also im ganzen:

$$m_1 - 3 + m_2 - 3 + \cdots + m_\mu - 3 = \Sigma m_i - 3 \cdot \mu$$

Stäbe. Dieses neu entstandene System bedarf zu seiner stabilen Lagerung $(n + 3)$ Stützungsstäbe. Um nun die Anzahl der für den ursprünglichen mehrfachen Flechtwerksteil nötigen Stützungsstäbe zu ermitteln, wird man im vorhergehenden System die

$$\Sigma m_i - 3 \cdot \mu$$

eingefügten Stäbe wegnehmen, sie als Stützungsstäbe einführen und erhält als Gesamtzahl der Stützungsstäbe:

$$r = \Sigma m_i - 3 \cdot \mu + n + 3 = \Sigma m_i + n - (\mu - 1) \cdot 3. \quad (75)$$

Bezeichnet man die Gesamtzahl der inneren Knotenpunkte mit M:

$$M = \Sigma m_i,$$

so erkennt man:

Ein Flechtwerksmantel, der nach irgend einer Form gebildet ist, im Inneren μ Öffnungen mit M Knotenpunkten und einen äußeren (unteren) Ring mit n Ecken besitzt, hat zu seiner stabilen Lagerung notwendig

$$M + n - (\mu - 1) \cdot 3$$

Stützungsstäbe.

Mit Rücksicht auf die Bedeutung der Flechtwerksidee möge der Beweis dieses Satzes auch auf anderem Weg, direkt mit Hilfe des mehrfachen Flechtwerks, geführt werden. Zur besseren Vorstellung nehme man etwa an, daß die verschiedenen Ringe des mehrfachen Flechtwerksteils in derselben Ebene liegen. Die Anzahl der nötigen Stützungsstäbe kann, wie beim einfachen Flechtwerksteil dadurch bestimmt werden, daß man zunächst den gegebenen Systemteil mittels der früher benützten Zwischenstäbe (gestrichelt angegeben) und eines unteren Pyramidensystems (ohne Grundfläche-Diagonalen) zu einem mehrfachen wirklichen Flechtwerk (mehrfaches Kuppelflechtwerk) ergänzt (Abb. 154). Die Grundfläche dieses Pyramidensystems besitzt als Stäbe nur diejenigen des äußeren Rings (n) und der verschiedenen inneren Ringe ($m_1 + m_2 + \cdots = M$), die entsprechend dem gegebenen System angeordnet sind. Von sämtlichen (inneren und äußeren) Eckpunkten laufen die Stäbe nach der Spitze. An Zwischenstäben sind in diesem Stabsystem nötig:

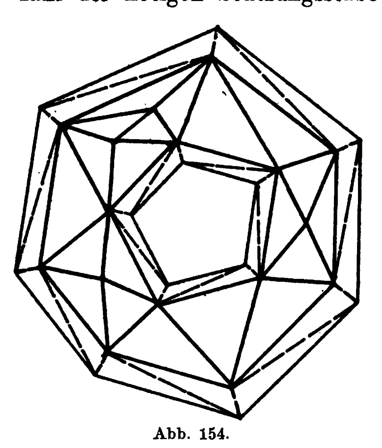


Abb. 154.

$$2\,(m_1 + m_2 + \cdots + m_\mu + n) = 2\,(M + n).$$

Das so entstandene Flechtwerksgebilde ist nach früheren Ausführungen (S. 143) nicht mehr statisch bestimmt, sondern $\mu \cdot 3$-fach statisch unbestimmt.

Um nun aus diesem mehrfachen Kuppelflechtwerk ein erweitertes System herzustellen, wird man eine derartige Stabvertauschung vornehmen, daß der untere Teil für sich ein Flechtwerk darstellt.

Hierzu sind in der Pyramidengrundfläche zwischen dem äußeren und den inneren Ringen soviel Stäbe einzuziehen, daß lauter Stabdreiecke entstehen; die Anzahl der hierzu nötigen Diagonalen beträgt:

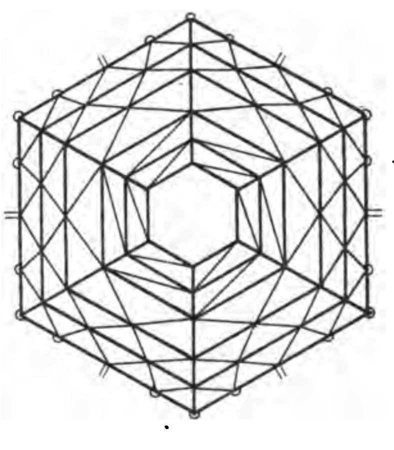
$$M + n + (\mu - 1) \cdot 3.$$

Das so entstandene System (Erdfachwerk + Stützungsstäbe + Flechtwerksteil) hat natürlich wiederum noch $\mu \cdot 3$ Stäbe zu viel; da aber der untere Teil als Hohlpyramiden-Flechtwerk an und für sich schon $\mu \cdot 3$-fach statisch unbestimmt ist, so besitzt der obere Teil für sich die richtige Stabzahl, wie sie zur sicheren Auflagerung des gegebenen Flechtwerksteils nötig ist. Damit ist denn gezeigt, daß

$$2(M + n) - \{M + n + (\mu - 1) \cdot 3\} = M + n - (\mu - 1) \cdot 3$$

Lagerbedingungen erforderlich sind, um einen Flechtwerksteil mit μ inneren Öffnungen stabil zu lagern.

118. Nach diesen allgemeinen Ausführungen bedarf ein Stabsystem, das einen äußeren und einen inneren Ring ($\mu = 1$) besitzt, $(m + n)$ Stützungsstäbe zur sicheren Lagerung. Die oben betrachtete offene Kuppel gehört zu diesen gestützten Systemen; bei ihr sind die sämtlichen $(m + n)$ Lagerbedingungen auf die unteren Ringpunkte verteilt.



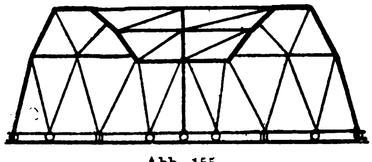


Abb. 155.

Ein weiteres Beispiel für derartige Systeme stellt Abb. 155 dar, das zur Überdeckung eines ringförmigen Raumes dienen könnte. Da die Anzahl der Eckpunkte gleich derjenigen der Stützungsstäbe ist, würde, wenn die inneren und äußeren Punkte gelagert werden sollen, jedem Punkte nur ein Stützungsstab zukommen, also jeder Punkt wäre auf einem Kugellager zu stützen. In dieser Weise ist aber das gestützte System sicher nicht stabil, es könnte sich in beliebiger Richtung bewegen.

Um es stabil zu lagern, wären noch Stabvertauschungen vorzunehmen. Andrerseits könnte man von der Stützung des inneren Rings ganz absehen und die $(m + n)$ Stützungsstäbe nur am äußeren Ring anbringen (Abb. 155). Wäre etwa $m = n$, so würden sämtliche Eckpunkte dieses Rings auf Gleitlagern zu stützen sein. Nach früherem (vgl. Schwedler-Kuppel) dürfen aber die Gleitrichtungen dieser Lager bei regelmäßigem Vieleck nicht nach dem Mittelpunkt laufen, da allgemein die Stabilität nicht sehr groß und bei gerader Anzahl überhaupt nicht vorhanden ist.

Bei einem Flechtwerksteil, der einen äußeren Ring und zwei innere Ringe irgend welcher Form besitzt und im übrigen ganz beliebig gestaltet sein kann, sind nach dem allgemeinen Satz zur Stützung notwendig

$$(m_1 + m_2 + n - 3)$$

Stützungsstäbe. Es ist also jetzt die Anzahl der Stützungsstäbe kleiner, als diejenige sämtlicher Ringeckpunkte zusammen.

Der hier ausgesprochene Satz für Lagerung irgend welcher Flechtwerksteile ist sehr fruchtbar. Er erlaubt, die verschiedenartigsten gestützten Systeme herzustellen, indem sich der Mantel jeder gewünschten Form anpassen kann. Das Nachzählen ist rasch erledigt und damit die Gewinnung irgend welcher Raumträger in die allereinfachste Bahn geleitet; der nächste Paragraph wird dies eingehend zeigen.

Hier möge nur noch mittels der Formel (75) die Frage nach der Zahl der Lagerbedingungen für die in Abb. 143 dargestellte dreigeschossige Zimmermannsche Kuppel beantwortet werden. Es sind fünf innere Öffnungen mit je vier Seiten vorhanden, also

$$M = 5 \cdot 4 = 20,$$

und der äußere Ring besitzt

$$n = 16$$

Ecken. Als notwendige Stützungsstäbe sind demnach einzuziehen:

$$20 + 16 - 4 \cdot 3 = 36 - 12 = 24;$$

diese Zahl stimmt aber mit der früher (S. 238) angegebenen überein.

Die Stabilitätsfrage ist natürlich mit dem Bekanntsein der Auflagerzahl nicht erledigt; dazu bedarf es einer weiteren Untersuchung.

§ 33. Die Herstellung neuer Kuppeln. Die Scheibenkuppel.

119. Auf Grund der allgemeinen Sätze kann irgend ein Flechtwerk oder ein Flechtwerksteil jederzeit verwendet werden, um eine Kuppel zu bilden. So kann man z. B. die bekannten Kristallsysteme benützen, um Kuppelformen herzustellen, nachdem man in denjenigen, die von Vierecken oder Fünfecken begrenzt sind, diese Felder durch Diagonalen in Dreiecke geteilt hat.

Der Ikosaeder ist (Abb. 156) von lauter Dreiecken begrenzt und demgemäß ohne weiteres zur Herstellung einer Kuppel verwendbar. Nach früheren Ausführungen (S. 147) kann man das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ sofort als Erdfachwerk auffassen, von dem die Stützungsstäbe nach den Ringpunkten a, m, b, n, c, o

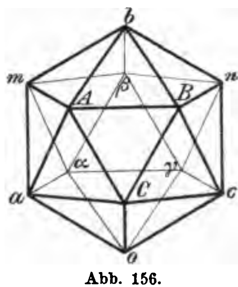


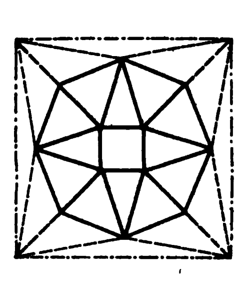


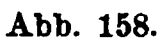
Abb. 156. Abb. 157.

laufen. Der oberhalb dieses Rings liegende Teil des Stabsystems stellt dann die eigentliche Kuppel dar. Man erkennt, daß die Punkte a, b, c in Kugellagern, dagegen m, n, o in Rollenlagern aufruhen, so daß damit das in Abb. 157 dargestellte Kuppelsystem gewonnen wird.

Wird die Struktur des Tetrakishexaeders benützt, um eine offene Kuppel zu gewinnen, so entsteht diejenige nach

Abb. 158, indem man von der oberen Hälfte dieses Flächners ausgeht. Das System ist nach denselben Grundsätzen aufgebaut, wie das vorhergehende: der untere Ring besitzt doppelt soviel Ecken, als der obere, und es ist die Hälfte der Lager als Kugellager, die andere Hälfte als Rollenlager (mit Gleitrichtung nach




Abb. 158.

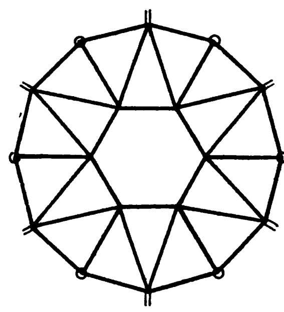


Abb. 159.

dem Mittelpunkt) auszubilden. Nach demselben Grundgedanken kann man mehrseitige Systeme aufbauen; so wird sich z. B. für ein System über einem sechsseitigen Raum das Gebilde nach Abb. 159 ergeben. Dasselbe besitzt sicher die richtige Stabzahl, wie aus dem allgemeinen Satz hervorgeht; ist aber auch stabil, wie man auf Grund weiterer Untersuchung leicht erkennt (S. 258).

120. Diese Systeme kann man nun dadurch spezialisieren, daß man jedesmal die drei Felder, die zwischen zwei Graten über den Kugellagern liegen, in einer Ebene anordnet, indem man die beiden Ringstäbe zwischen zwei Kugellagern in dieselbe Richtung fallen läßt. Man erhält so die Kuppel nach Abb. 160, die über einem beliebigen Raum hergestellt werden kann, und hat damit ein System gewonnen, das gerade soviel Seitenflächen besitzt wie der zu überdeckende Raum: der Unter- und Oberring erhalten gleichviele Eckpunkte, ähnlich wie bei der Schwedler-Kuppel. Der wesentliche Unterschied ist der, daß

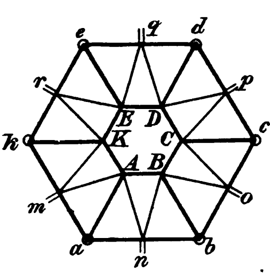


Abb. 160.

nun in jedem Trapezfeld statt einer Diagonale deren zwei eingezogen sind, daß hierdurch neue Knotenpunkte entstehen, die auf Rollenlagern ruhen, während die wirklichen Eckpunkte auf Kugellagern gestützt sind. Die Lagerung dieser Scheibenkuppel (Flächenkuppel)[1]) ist also ähnlich derjenigen der Zimmermannschen in der wirklichen Ausführung; während aber letztere $3n$ Lager besitzt, sind es hier nur deren $2n$. Die nachträgliche Konstruktion der Gratfachwerke fällt fort; dadurch vereinfacht sich die Konstruktion wesentlich, wie auch schon durch den Umstand, daß jetzt die Stäbe in n Ebenen verteilt sind, dagegen bei der Zimmermannschen Kuppel in $2n$ Ebenen. Andrerseits sind die Vorzüge der Zimmermannschen Lagerung vollständig vorhanden: in Richtung senkrecht zur Mauerflucht treten überhaupt keine Lagerkräfte auf, sondern in den Ecken nur senkrechte, in den Mitten senkrechte und solche in Richtung der Mauer. Wohl scheint die Zimmermannsche Kuppel besser versteift zu sein, aber die Scheibenkuppel ist ebenfalls sicher statisch bestimmt (vgl. Nr. 121) und kann demgemäß genau berechnet werden, so daß man wohl sagen darf: die Scheibenkuppel weist die Vorteile der Zimmermannschen Kuppel auf, vermeidet aber deren Nachteile.

Daß die mittleren Knotenpunkte in irgend einem anderen Punkte zwischen den Eckpunkten angeordnet werden können, und entsprechend auch die Gleitlager, ist selbstverständlich.

121. Es möge nun vor allem gezeigt werden, daß die Scheibenkuppel auch tatsächlich stabil ist; wenn dies für diese Kuppel gilt, dann gilt dieses auch für Systeme nach Abb. 159, die ja offenbar nicht weniger starr sind. Zunächst weiß man, daß die richtige Anzahl von Stäben vorhanden ist: denn es ist $n = 2m$, also sind nach Formel (73) erforderlich m Gleitlager und $2m - m = m$ Kugellager. Weiter ist nach früherem Satz zum Nachweis der Stabilität zu zeigen, daß beim Fehlen von äußeren Kräften in allen Stäben die Spannung Null auftritt.

[1]) Schlink, Ztschr. f. Arch. u. Ingw. 1904, S. 183. — Vhdlgn. d. V. f. Gewerbefleiß 1904, S. 181.

In Abb. 161 ist die Kuppel nochmals aufgezeichnet mit Einführung der Stützungsstäbe, die wieder der Deutlichkeit wegen in schiefer Ebene angenommen sind. Man kann nun, wie dies ähnlich bei der Zimmermannschen Kuppel geschah (S. 120), zunächst die Spannungen in den sechs oberen Stäben $AB, BC \cdots$ ganz beliebig annehmen, $S_1, S_2 \cdots S_6$, mit Hilfe dieser Werte die Spannungen in den anderen Stäben darstellen und dann die Knotenpunkte $m, n \cdots$ zur Aufstellung von Bedingungsgleichungen benützen. Die Spannungen in den von A auslaufenden Stäben Ar, Aa und Am sind abhängig von S_6 und S_1, diejenigen in Bm, Bb, Bn von S_1 und S_2 usw. Nun betrachte man Knotenpunkt m, an dem nach Voraussetzung keine äußere Kraft wirkt. Die Summe aller Kraftkomponenten in einer beliebigen Richtung, z. B. senkrecht zur Ebene $(a\,m\,b\,\beta\,\alpha)$, muß verschwinden; da nun für letztere Richtung die Stäbe am, mb, $m\alpha$, $m\beta$, die in der Ebene $(a\,m\,b\,\beta\,\alpha)$ liegen, keine Komponente liefern, so muß für diese Richtung die algebraische Summe der Komponenten von Am und Bm den Wert Null ergeben. Da aber Am und Bm die Spannungen S_6 und S_1, bezw. S_1 und S_2 enthalten, so erhält man am Knotenpunkt m eine Bedingungsgleichung von der Form:

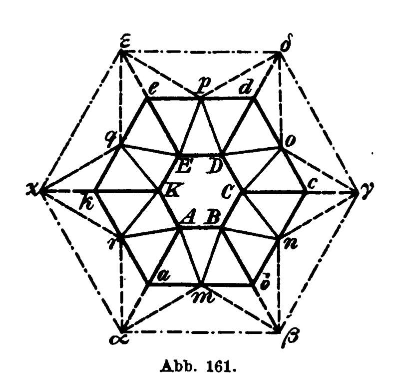


Abb. 161.

$$a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_2 + 0 \cdot S_3 + 0 \cdot S_4 + 0 \cdot S_5 + a_6 \cdot S_6 = 0.$$

Entsprechende Gleichungen liefern die übrigen Knotenpunkte $n, o \cdots$; es ergeben sich im ganzen sechs Gleichungen mit sechs Unbekannten, die nur dann für die unbekannten Spannungen S_i von Null verschiedene Werte liefern, wenn die Determinante des Systems verschwindet. Das tritt aber nicht ein und daraus folgt, daß tatsächlich die Spannungen in diesen Stäben Null sind. Haben aber diese den Wert Null, so ergeben die Knoten-

punkte A, $B \cdots K$ in Gratstäben und Diagonalen ebenfalls die Spannungen Null, und weiter liefern die Punkte a, $b \cdots$ und Knotenpunkte m, $n \cdots$ die Spannungen Null in allen übrigen Stäben, einschließlich der Stützungsstäbe.

Einen noch einfacheren Beweis bietet folgende Überlegung, die einem von Föppl[1]) angewandten Gedankengang zur Berechnung seiner Leipziger Kuppel entnommen ist. Bei der Kuppel, auf die keine äußeren Kräfte wirken, denke man sich ein einzelnes Dreieck, das durch einen oberen Ringstab und ein Diagonalenpaar begrenzt ist, herausgeschnitten, z. B. AmB. Die an demselben angreifenden Kräfte (d. s. die Spannungen der durchschnittenen Stäbe) müssen im Gleichgewicht stehen. Diese Stäbe haben nun die spezielle Lage, daß die an einer Ecke zusammentreffenden in derselben Ebene liegen: an A die Stäbe AK, Ar und Aa; an B: BC, Bn, Bb und an m: ma, $m\alpha$, $m\beta$ und mb. Die Resultante R_A der drei bei A geschnittenen Stäbe muß sowohl in der Ebene KAa, wie auch ABa liegen, da ja die Resultante von AK, Ar, Aa mit derjenigen in AB, Am Gleichgewicht halten muß; es fällt demgemäß R_A in die Schnittlinie Aa der beiden Ebenen. Ebenso liegt die Resultante R_B der drei Spannungen in BC, Bn und Bb in der Linie Bb und diejenige der bei m getroffenen Stäbe (R_m) in amb. Es würden demnach, wenn in A, B, m keine äußeren Kräfte angreifen, drei Kräfte in den Richtungen Aa, amb und Bb, also in einer Ebene, sich Gleichgewicht zu halten haben. Da sich aber die drei Kräfte R_A, R_B, R_m nicht in einem Punkte schneiden, ist Gleichgewicht zwischen ihnen nur möglich, wenn alle drei Kräfte den Wert Null besitzen. Demgemäß wirkt auf das losgelöste Dreieck AmB, beim Fehlen von äußeren Kräften, überhaupt keine Kraft ein, und es müssen darum die Spannungen in AB, Bm und mA den Wert Null haben.

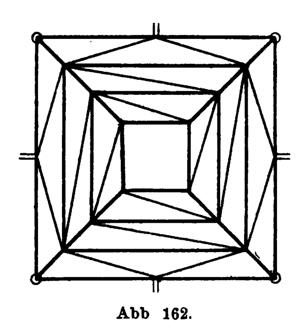
Dasselbe findet sich für die übrigen Dreiecke. Dann ergibt sich aber sofort mittels der Knotenpunkte A, $B \cdots$, daß

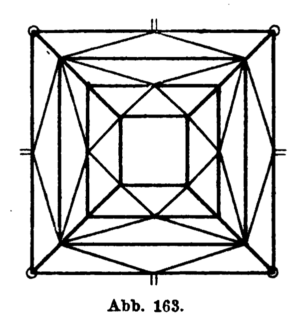
[1]) Föppl, D. Fachw. i. R., S. 93. — D. graph. Statik, 2. Aufl., S. 333.

die Gratstäbe $Aa \cdots$ ebenfalls die Spannung Null erhalten, und weiter mittels der Knotenpunkte $a, b \cdots$ und $m, n \cdots$, daß sowohl in den Unterring- wie Stützungsstäben keine Spannung auftritt. Hiermit ist gezeigt, daß alle Stabspannungen den Wert Null haben, wenn keine äußere Kraft vorhanden, daß also die Scheibenkuppel tatsächlich stabil ist.

§ 34. Mehrgeschossige Scheibenkuppeln.

122. Dieselben können nach verschiedenen Grundsätzen hergestellt werden. Ist etwa eine zweigeschossige Kuppel zu bilden, so kann man das untere Geschoß nach Abb. 160 aufbauen und dann die Punkte $A, B \cdots$, die eine völlig feste Lage besitzen, benützen, um auf sie eine der gewöhnlichen Kuppeln, z. B. eine Schwedler-Kuppel, aufzusetzen. Durch entsprechende Erweiterung dieses Gedankens ist das dreigeschossige System der Abb. 162 gewonnen. Diese Kuppel besitzt gegenüber der gewöhnlichen Schwedlerschen den Vorteil der günstigen Lagerung, und außerdem sind die Diagonalen der unteren Felder durch Verwendung der Diagonalenpaare wesentlich gekürzt.


Abb 162.


Abb. 163.

Des weiteren könnte man zur Herstellung einer mehrgeschossigen Kuppel, etwa einer dreistöckigen, den Gedankengang anwenden, von dem Zimmermann bei seiner Kuppel Gebrauch machte: auf die sicher festen Punkte $A, B \cdots$ des unteren Geschosses wird eine neue Scheibenkuppel vermittelst

ihrer Stützungsstäbe aufgesetzt; d. h. von diesen Punkten laufen die Stützungsstäbe aus (Stützengeschoß), die die obere Kuppel tragen (Abb. 163). Die Ebene eines Stützungsfeldes darf hierbei nicht mit derjenigen des darüberliegenden Feldes zusammenfallen, da sonst die Zwischenpunkte keine feste Lage mehr hätten.

Eine zweigeschossige Kuppel könnte man nach diesem letzten Grundsatz in der Weise ausführen, daß man von festgelegten Punkten a, $b \cdots$ die Stützungsstäbe ausgehen läßt, die als zweites Geschoß die Kuppel tragen. Die Festlegung der Punkte $a, b \cdots$ kann entweder dadurch geschehen, daß man dieselben auf feste Lager stützt, wobei der Ring $abcd$ überflüssig ist, oder aber daß man bei Beibehaltung des Fußrings die Punkte auf Kurvenlagern mit allgemeiner Gleitrichtung anordnet (Abb. 164). Daß in diesem Fall die Punkte $a, b \cdots$ eine unverschiebliche Lage besitzen, wurde bereits früher (Nr. 68, 73) bewiesen.

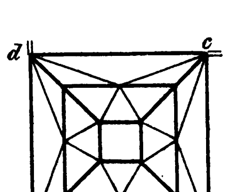


Abb. 164.

Erstere Kuppel ist tatsächlich schon von Föppl ausgeführt worden zur Überdeckung der Markthalle in Leipzig (Leipziger Kuppel).[1]) Faßt man bei derselben die Stäbe des unteren Geschosses als Stützungsstäbe auf und ersetzt dann diese durch Lager, so kommt man sofort auf die Scheibenkuppel. Man kann deshalb zur Berechnung derselben ein von Föppl für die Leipziger Kuppel angegebenes Verfahren benützen.

Die so erhaltene zweigeschossige Kuppel hat den wesentlichen Nachteil, daß sie die günstige Lagerung der Scheibenkuppel nicht aufweist; andrerseits besitzen die Kuppeln nach Abb. 162 den Übelstand, daß die Diagonalen der aufeinanderfolgenden Felder noch sehr verschieden groß sind. Es wäre jedenfalls erwünscht, daß zwischen den Eckpunkten der einzelnen Ringe ein oder mehrere Zwischenknotenpunkte vor-

[1]) D. Fachw. i. R., S. 93. — D. graph. Statik.

handen sind, so daß die einzelnen Diagonalstäbe nicht zu lang werden.

123. Man wird hierdurch auf den Gedanken geführt, je nach Bedarf statt eines Diagonalenpaares in jedem Felde deren mehrere anzuordnen, und in entsprechender Weise eine mehrgeschossige Kuppel aufzubauen. Abb. 165 stellt z. B. eine derartige günstige, dreigeschossige Kuppel über quadratischem Raume dar. Da zwischen dem untersten und obersten Ring lauter Dreiecke liegen und der erstere 16, der obere dagegen vier Knotenpunkte besitzt, sind nach Gl. 73 zur stabilen Auflagerung notwendig: 4 Rollenlager und $12 - 4 = 8$ Kugellager. Demnach besitzt das gestützte System sicher die richtige Anzahl von Stäben; es ist aber auch stabil, sofern die aufeinanderfolgenden Geschoßfelder nicht in dieselbe Ebene fallen; wäre dies der Fall, so hätten ja die Zwischenpunkte keine unverschiebliche Lage, da sie durch Stäbe in derselben Ebene angeschlossen wären.

Der Stabilitätsnachweis möge wiederum mittels des Satzes geschehen, daß beim Fehlen von äußeren Kräften alle Stäbe spannungslos sein müssen. Man gehe vom obersten Geschosse aus: für dieses wurde schon gezeigt, daß in den Stäben der Dreiecke $ABm, \cdots$, sowie in den Gratstäben keine Spannungen auftreten. Es wirken demgemäß am zweiten Geschoß von oben her keine Kräfte.

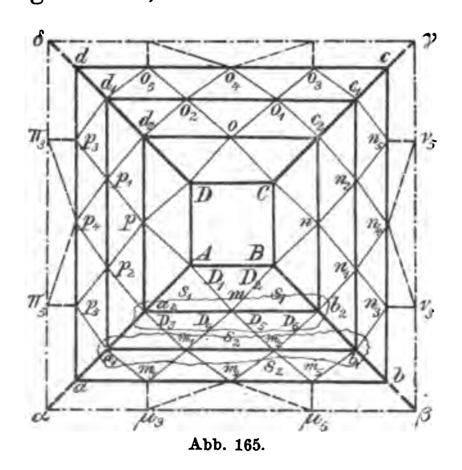


Abb. 165.

In diesem Stock lege man nun einen Flächenschnitt, der alle Diagonalen des betreffenden Trapezfeldes einschließt und am Knotenpunkt a_2 die Stäbe $a_2 a_1$, $a_2 p_2$, $a_2 p$, $a_2 A$ schneidet, an b_2 die Stäbe $b_2 b_1$, $b_2 n_1$, $b_2 n$, $b_2 B$ und an m: mA, mB; weiter am Punkte m_1 die

Stäbe $m_1 a_1$, $m_1 m_3$ und $m_1 m_4$ trifft, schließlich an m_2: $m_2 m_4$, $m_2 m_5$, $m_2 b_1$. Da keine Kräfte wirken, müssen die Spannungen dieser verschiedenen durchschnittenen Stäbe im Gleichgewicht stehen, wobei zu beachten ist, daß in Aa_2, Am, Bm, Bb_2 keine Spannung auftritt. Die Resultante K_1 der bei a_2 getroffenen Stäbe liegt in der Linie $a_1 a_2$, weil die in Betracht kommenden Kräfte (Aa_2 ist ja Null!) in zwei Ebenen verteilt sind, deren Schnittlinie $a_1 a_2$ ist. Aus demselben Grunde liegt die Resultante K_2 von allen Spannungen der bei b_2 geschnittenen Stäbe in Richtung $b_2 b_1$, ferner die Resultante K_3 der Spannungen in $m_1 a_1$, $m_1 m_3$, $m_1 m_4$ in Linie $a_1 m_1$, entsprechend diejenige K_4 der bei m_2 getroffenen Stäbe in $m_2 b_1$, also in derselben Richtung.

Für den durch den erwähnten Schnitt abgetrennten Teil erhält man demgemäß das in Abb. 166 gezeichnete Kräftebild. Da nun die Resultante R_m der Kräfte K_3, K_4 ebenfalls in die Linie $m_1 m_2$ fällt, kann man sagen: auf den losgelösten Teil, d. i. ein ebenes Stabsystem, wirken drei Kräfte K_1, K_2, R_m, die sich sicher nicht in einem Punkte schneiden, und die im Gleichgewicht stehen müssen. Das ist aber nur möglich, wenn

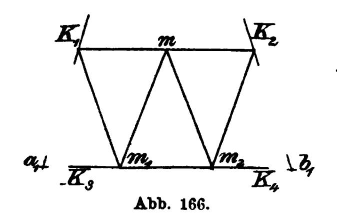


Abb. 166.

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0$$

und

$$R_m = K_3 + K_4 = 0.$$

Da $K_1 = 0$ ist, folgt aus Knotenpunkt a_2, daß auch $a_2 m$ und $a_2 m_1$ die Spannung Null haben; ebenso liefert Knotenpunkt b_2 für $b_2 m$ und $b_2 m_2$ den Wert Null. Die Betrachtung des Punktes m ergibt alsdann, daß in mm_1 und mm_2 keine Spannungen auftreten. Man gelangt schließlich zu den Punkten m_1 und m_2, die lehren, daß $K_3 = m_1 m_2 = K_4$ ist. Über die Größen von K_3 und K_4 weiß man zunächst noch nichts weiter, als daß sie gleich $m_1 m_2$ sind. Jedenfalls lehrt aber die Betrachtung des Feldes, daß in allen Diagonalen und Oberringstäben des zweiten Geschosses keine Spannungen auftreten. Die Knoten-

punkte a_2, b_2, c_2, d_2 ergeben dann sofort, daß auch in den Gratstäben $a_2 a_1$, $b_2 b_1 \cdots$ die Spannung Null wirkt.

Man gelangt weiter zum dritten Geschoß und betrachte wiederum das durch den Flächenschnitt um a_1, m_1, m_2, b_1, m_5, m_4, m_3 losgetrennte ebene Stabsystem (Abb. 167). Auf dasselbe wirken in m_1 und m_2 keine Kräfte ein, da ja $a_2 m_1$, $m m_1$ bezw. $m m_2$, $b_2 m_2$ spannungslos sind. Die Resultante K_1 der Spannungen aller bei a_1 getroffenen Stäbe liegt in Richtung $a_1 a$, diejenige (K_2) der betreffenden Kräfte bei b_1 in der Linie $b_1 b$

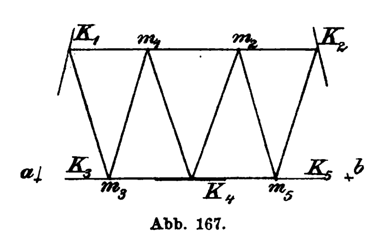


Abb. 167.

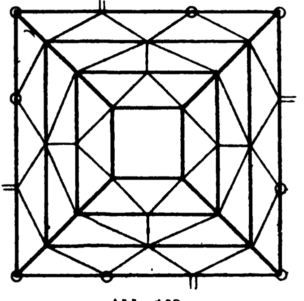
und schließlich liefern die Spannungen der bei m_3 geschnittenen Stäbe eine Resultante K_3 in Richtung $m_3 m_4$, diejenigen bei m_4 und m_5 eine solche in derselben Linie, so daß das ebene Feld nach Abb. 167 belastet ist. Die Resultante R_M der Kräfte K_3, K_4, K_5 fällt in dieselbe Richtung ab, woraus hervorgeht, daß auf das ebene System die drei Kräfte K_1, K_2, R_M wirken, die sich nicht in einem Punkte schneiden. Da sie sich Gleichgewicht halten sollen, müssen sie die Größe Null haben:

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0,$$
$$R_M = K_3 + K_4 + K_5 = 0.$$

Mit Einführung dieser Werte findet sich an Knotenpunkt a_1 in $a_1 m_1$ und $a_1 m_3$ die Spannung Null, an b_1 diejenige in $b_1 m_2$ und $b_1 m_5$. Die Betrachtung des Knotenpunktes m_3 (bezw. m_5), an dem in der Richtung $m_3 m_4$ die Kraft K_3 (bezw. K_5 in $m_4 m_5$) und in Richtung $a_1 m_3$ (bezw. $b_1 m_5$) die Spannung Null wirkt, liefert für die Spannung in $m_1 m_3$ (bezw. $m_2 m_5$) den Wert Null und ferner für diejenige in $m_3 m_4$ (bezw. $m_5 m_4$) die Größe K_3 (K_5). Die Knotenpunkte m_1 und m_2 lehren dann, daß in $m_1 m_2$, $m_1 m_4$, $m_2 m_4$ keine Spannung auftritt, und Punkt m_4 ergibt, daß sich diejenigen in $m_3 m_4$ und $m_4 m_5$ durch K_4 unterscheiden. Damit ist gezeigt, daß in sämtlichen Diagonalen und Oberringstäben des dritten Geschosses keine Kräfte wirken.

Die beim zweiten Geschoß als noch unbestimmt gefundene Spannung in $m_1 m_2$ hat sich also jetzt ebenfalls zu Null ergeben. Die Knotenpunkte a_1, $b_1 \cdots$ liefern schließlich noch die Werte Null für die Spannungen in den Gratstäben $a_1 a$, $b_1 b \cdots$.

Würde unter dem eben betrachteten Geschoß noch ein weiteres liegen, so wären die bisherigen Überlegungen entsprechend fortzuführen und würden für die Stäbe $m_3 m_4$, $m_4 m_5 \cdots$ auch die Spannungen Null ergeben, als Oberringstäbe des neuen Geschosses. Im vorliegenden Beispiele, bei dem auf das drittoberste Geschoß das Stützengeschoß folgt, gestaltet sich die Untersuchung einfacher. Aus Knotenpunkt a folgt, daß in am_3, ap_5, $a\alpha$ keine Spannung wirkt, da keine Kräfte außer diesen Spannungen an a angreifen. Ebenso ergeben die Punkte b, c, d, daß in den daselbst zusammentreffenden Ringstäben und dem einzelnen Stützungsstab keine Spannung auftritt. Am Knotenpunkt m_3 (bezw. m_5) weiß man, daß in $m_3 a$ (bezw. $m_5 b$) und den von oben her zusammentreffenden Diagonalstäben keine Spannung wirkt, also erhalten auch die Stäbe $m_3 m_4$, $m_3 \mu_3$ (bezw. $m_5 m_4$, $m_5 \mu_5$) keine Beanspruchung. Schließlich ergibt Knotenpunkt m_4 in $m_4 \mu_3$ und $m_4 \mu_5$ ebenfalls die Spannung Null. Da dasselbe Resultat für die anderen Stützungsebenen gefunden wird, ist hiermit gezeigt, daß tatsächlich beim Fehlen der äußeren Kräfte alle Stäbe (Fachwerks- und Stützungsstäbe) spannungslos sind, daß also diese mehrgeschossige Scheibenkuppel stabil ist.


Abb. 168.

Man erkennt leicht aus dem Gang des Beweises, daß sich für alle derartige Kuppeln, bei denen in den einzelnen Flächen lauter Dreiecke liegen, die mit denen benachbarter Felder gemeinsame Knotenpunkte besitzen, die Stabilität beweisen läßt, sofern die übereinander liegenden Felder sich nicht in derselben Ebene befinden. So

stellt z. B. Abb. 168 eine andere Art von sicher stabilen Kuppeln dar.

124. Kuppeln, deren Stabsystem mit den eben betrachteten völlig übereinstimmt, wurden bereits von Föppl[1]) angegeben, aber die hier eingeführte günstige Lagerung, die eine direkte Folge der allgemeinen Sätze ist, ist nicht vorhanden, so daß man die „Scheibenkuppeln" wohl als neue Kuppeln bezeichnen darf. Bei Föppl ist der Unterring mit n Punkten an und für sich völlig festgelegt; er bedarf hierzu, wie beim Ring der Schwedler-Kuppel gezeigt: $2n$ Stützungsstäbe, während nach dem allgemeinen Satz nur

$$n + m = n + 4 \text{ (bei viereckigem Raume!)}$$

Stützungsstäbe zur sicheren Stützung eines derartigen Systems nötig sind. Wenn z. B. jede Unterringseite fünf Zwischenpunkte enthält ($n = 4 \cdot 5 + 4 = 24$), ist das System von Föppl 20fach unbestimmt, sofern keine besondere Maßregeln getroffen werden. Eine solche besteht z. B. darin, daß man von den zehn Diagonalen eines jeden untersten Feldes fünf fortläßt, oder aber alle zehn schlaff ausführt, so daß diese Diagonalen als Gegendiagonalen aufgefaßt werden dürfen.

125. Mittels der seitherigen Ausführungen erhält man, wie ersichtlich, zweckmäßig gebaute Kuppeln, die eine sehr günstige Lagerung aufweisen und eine klare Kräfteübertragung bieten; das wesentliche ist immer, daß die Seitenzahl des Kuppelsystems gleich derjenigen des zu überdeckenden Raumes ist, daß sich sämtliche Stäbe in den Mantelflächen des Daches befinden, daß die Kuppel in allen Unterring-Knotenpunkten gelagert ist, und zwar nur auf Kugellagern und solchen Rollenlagern, die senkrecht zur Mauerflucht beweglich sind, so daß also in dieser Richtung überhaupt keine Lagerkräfte auftreten und die in horizontale Mauerrichtung fallende Reaktion im Verlaufe der Mauerflucht angreift.

---

[1]) Föppl, D. Fachw. i. R., S. 93—100.

Man ist überhaupt in dieser Weise durch zweckmäßige Verwendung der Flechtwerksidee in die Lage gesetzt, leicht eine günstig gelagerte und gebaute Kuppel herzustellen, die sich jeder gewünschten architektonischen Form aufs beste und natürlichste anpaßt. So stellt z. B. Abb. 169 ein sechsseitiges System dar, das aus einer unteren Kuppel, einem darüber gelegenen Tambour und einem Kuppeldach besteht. Das Ganze ist ein Flechtwerksteil mit $n = 24$ unteren und $m = 6$ oberen Knotenpunkten. Die Anzahl der zur stabilen Lagerung nötigen Stützungsstäbe (Formel 73) ist demnach 30, also sind nötig 18 Kugel- und sechs Gleitlager.

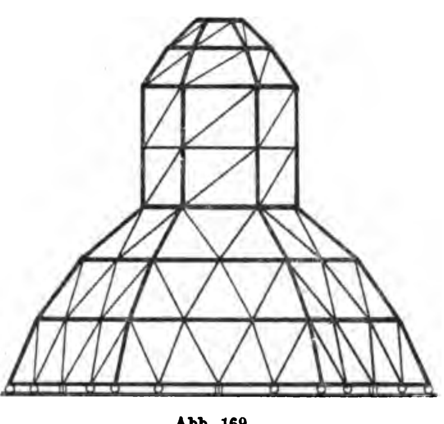


Abb. 169.

Weitere Beispiele stellen die Abbildungen 155 und 170 dar. Bei ersterem System sind zur Lagerung in sämtlichen äußeren Ringknotenpunkten sechs Rollenlager und im übrigen lauter Kugellager nötig; statt der Lager könnten natürlich auch Stäbe (Stützen) verwendet werden, indem die Rollenlager durch Pendelstützen, die Kugellager durch Kugelstützen ersetzt werden. Das System der Abb. 170 ist ein Flechtwerksteil, das einen äußeren Ring mit 22, zwei innere mit je acht Knotenpunkten besitzt; zur stabilen Lagerung sind demnach (Formel 75) notwendig:

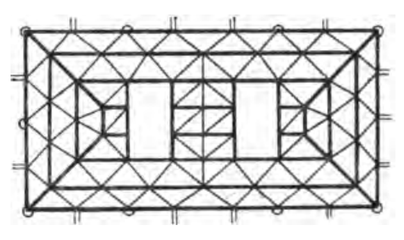


Abb. 170.

$$22 + 8 + 8 - (2 - 1) \cdot 3 = 38 - 3 = 35$$

Stützungsstäbe; werden diese sämtlich in den 22 unteren

Knotenpunkten verteilt, so ergeben sich 13 Gleit- und neun Kugellager.

Daß in derartigen Systemen nachträglich noch Stabvertauschungen vorgenommen werden können und so die Anzahl der Gleitlager zu vermehren ist, ist selbstverständlich.

Achtes Kapitel.

Die Berechnung der Scheibenkuppeln.

§ 35. Berechnung der eingeschossigen Scheibenkuppel. Spannungen der Diagonalen.

126. Die Berechnung gestaltet sich sehr einfach bei Anwendung der Momentenmethode, vor allem wenn es auf analytische Durchführung ankommt.[1]) Wenn sich hierbei eindeutige und endliche Werte ergeben, ist die Kuppel sicher stabil; es wäre demgemäß der vorherige Stabilitätsnachweis entbehrlich gewesen; aber da es sich um ein neues System handelt, wurde er doch besonders geführt.

Der Berechnung möge zunächst eine eingeschossige Kuppel zu Grunde gelegt werden. Zweckmäßig geht man in der Weise vor, daß man zuerst sämtliche Diagonalenpaare bestimmt. Zur Ermittlung der Spannungen eines Paares legt man zwei derartige Schnitte, daß die Momentenmethode jedesmal das Aufstellen einer Gleichung erlaubt, die nur die beiden Diagonalspannungen als Unbekannte enthält. Jeder Schnitt muß also so gelegt werden, daß alle getroffenen Stäbe mit Ausnahme der Diagonalen sich auf einer Linie schneiden.

Der eine Flächenschnitt ist der um m geführte, der außer den Diagonalstäben noch ma, mb und die beiden Stützungsstäbe $m\alpha$ und $m\beta$ trifft. Wird die Momentenachse in der

---

[1]) Schlink, Vhdlgn. d. V. f. Gew. 1904, S. 181.

Ebene $ab\beta\alpha$ gewählt, z. B. die Linie $\alpha\beta$, so treffen alle geschnittenen Stäbe mit Ausnahme von Am und Bm diese Linie, da sie derselben Ebene angehören, liefern also kein Moment in der Momentengleichung. Außer dem Moment von ${}_AD_m$ und ${}_BD_m$ tritt in der Gleichung nur noch das Moment der in m wirkenden äußeren Kraft auf.

Die zweite Gleichung wird mittels eines Flächenschnitts erhalten, der um die Knotenpunkte A und B geführt ist, von dem also die Stäbe AK, Aa, Ar, Am, Bm, Bb, Bn und BC getroffen werden. Als Momentenachse wird die Schnittlinie der Ebene $AKka$ und $BCcb$ eingeführt, die demnach von den Stäben dieser beiden Ebenen getroffen wird, für die also von den Stabspannungen nur Am und Bm ein Moment liefern. Außerdem wird natürlich in der Momentengleichung das Moment der in A und B wirkenden äußeren Kraft auftreten.

Dasselbe gilt von jedem anderen Diagonalenpaar; für jedes derselben kann man zwei Gleichungen aufstellen, sodaß man alle diese Spannungen unabhängig von irgend einer anderen Stabspannung berechnen kann.

Die Methode ist für eine Kuppel über jedem Raum verwendbar. Für ein System mit regelmäßigem Grundriß gestaltet sie sich besonders einfach, da in jedem Felde die Diagonalen dieselbe Lage haben, also die verschiedenen Gleichungspaare bezüglich dieser Spannungen völlig gleichgebaut sind.

Nach Bestimmung der Diagonalspannungen lassen sich die anderen Spannungen sofort ausrechnen: mittels der Knotenpunkte $A, B \cdots E, K$ können die Kräfte in den Oberring- und Gratstäben ermittelt werden; alsdann aus Betrachtung der Knotenpunkte $a, b \cdots k$ die Spannungen in den Unterringstäben und die Reaktionen der Kugellager, schließlich mittels der Knotenpunkte $m, n \cdots r$ die wagrechten und senkrechten Komponenten der Gleitlager, entsprechend den beiden Stützungsstäben, deren Resultante jedesmal die Auflagerkraft liefert. Da die Knotenpunkte $m, n \cdots r$ benützt wurden, um die Gleichungen der Diagonalspannungen aufzustellen, ergibt es sich von selbst, daß die Resultante der in $m \cdots$ wirkenden äußeren Kraft, der

beiden Diagonalen und der beiden Unterringstäbe eine Kraft in der Ebene der Gleitlagerstäbe liefert. Zur weiteren Spannungsermittlung wäre es gar nicht nötig, alle Diagonalspannungen zu berechnen; aber dadurch, daß sie alle ermittelt sind, ist eine Probe vorhanden, indem jede obere Ringspannung doppelt vorkommt, z. B. AB sowohl vom Knotenpunkt A, wie von B usw.

127. Die näher zu betrachtende sechsseitige regelmäßige Kuppel (Abb. 171) sei festgelegt durch die drei Bestimmungsstücke: Länge der unteren Umfangsseite s, Höhe des Geschosses h und horizontale Entfernung f der beiden Ringe. Die Radien der in den äußeren bezw. inneren Ring einbeschriebenen Kreise sind dann gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_a &= \frac{s}{2}\cdot\cot\frac{\zeta}{2}, \\ \varrho_i &= \frac{s}{2}\cdot\cot\frac{\zeta}{2} - f, \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

wenn ζ der über einer Vielecksseite liegende Centriwinkel bedeutet. Die Länge der Oberringseite ist bestimmt durch:

$$\frac{t}{2} = \varrho_i \cdot \operatorname{tg}\frac{\zeta}{2} = \frac{s}{2} - f\cdot\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}. \tag{77}$$

Es können demgemäß die Größen $h, s, t, f, \varrho_a, \varrho_i$ ohne weiteres als bekannt betrachtet werden, ebenso der Winkel α zwischen den Seitenflächen und der horizontalen Ebene, indem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{f}, \quad \sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+f^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{f}{\sqrt{h^2+f^2}}. \tag{78}$$

Um das Moment der Stabspannungen ${}_AD_m$ und ${}_BD_m$ in Am und Bm für die Momentenachse $\alpha\beta$ aufzustellen, zerlege man sowohl ${}_AD_m$ wie ${}_BD_m$ in der Ebene $ABba$ in eine Komponente in Richtung ab und eine senkrecht hierzu. Erstere Komponenten laufen parallel zur Linie $\alpha\beta$, liefern also für diese Achse kein Moment, wohl aber die letzteren. Ist der wirkliche Winkel zwischen Am und am bezw. Bm und bm gleich ν, so kommen demnach für die Momentengleichung

$${}_AD_m\cdot\sin\nu \quad \text{und} \quad {}_BD_m\cdot\sin\nu$$

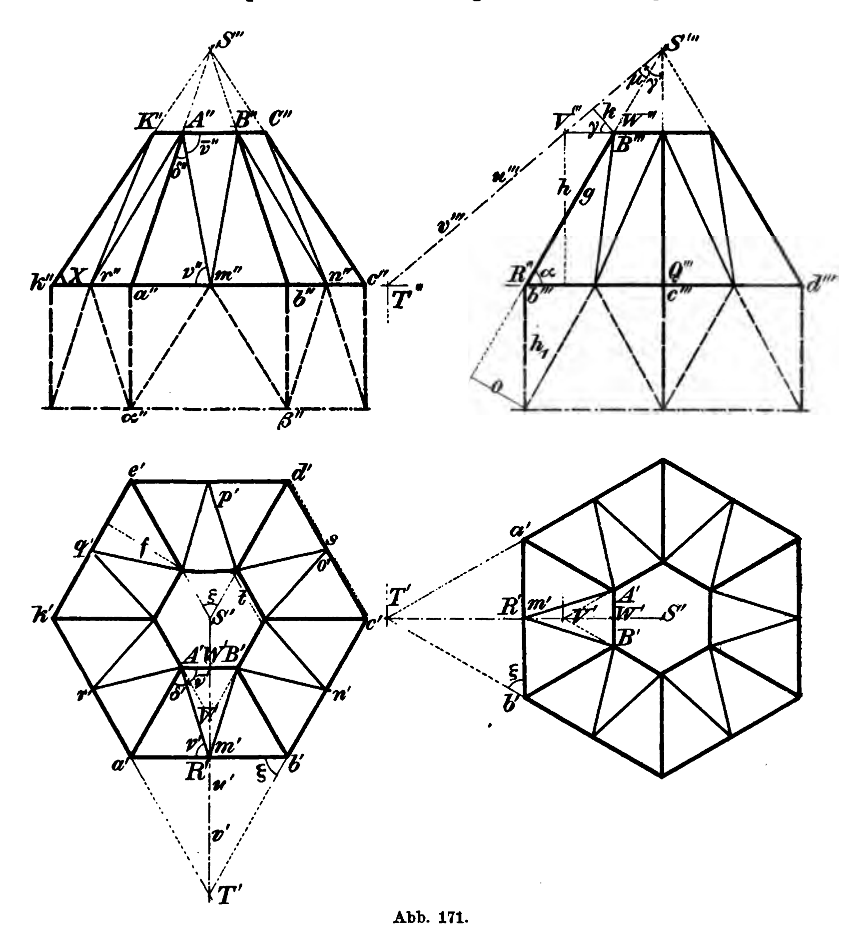


Abb. 171.

in Betracht. Der Hebelarm dieser Kraft ist nach Abb. 171 gegeben durch:

$$o = h_1 \cdot \cos \alpha,$$

wenn h_1 die willkürliche Höhe des Stützungsgeschosses bedeutet, die natürlich später wieder herausfallen muß. Die Gleichung lautet demnach:

$$({}_AD_m + {}_BD_m) \cdot \sin \nu \cdot h_1 \cdot \cos \alpha + M_m = 0.$$

Der Winkel ν ist durch die Kuppelform bestimmt; er kann also auch durch die oben als bekannt eingeführten Werte

ausgedrückt werden (vgl. S. 273). M_m bedeutet das Moment der in m wirkenden äußeren Kraft bezüglich der Achse $\alpha\beta$.

Zwecks Aufstellung der Momentengleichung für den um A und B gelegten Schnitt zerlege man jede Diagonalspannung in zwei Komponenten, von denen die eine in die Richtung des Ringstabes AB (${}_A^rD_m$ bezw. ${}_B^rD_m$), die andere in Richtung des Gratstabes Aa bezw. Bb fällt. Letztere beiden Komponenten (${}_A^sD_m$ bezw. ${}_B^sD_m$) fallen in die Ebenen, deren Schnittlinie die Momentenachse uv ergibt, liefern also zum Moment keinen Beitrag. Man hat demgemäß:

$$k \cdot {}_A^rD_m - k \cdot {}_B^rD_m + M_A + M_B = 0,$$

wenn k den Hebelarm der in Richtung AB wirkenden Kraft für die Achse uv, und M_A, M_B das Moment der in A und B wirkenden äußeren Kräfte für dieselbe Linie darstellt. Wird der Winkel zwischen AB und Am bezw. Bm in der Ebene $ABab$ mit $\bar{\nu}$ $(= \nu)$ bezeichnet, der Winkel zwischen Aa und Am in derselben Ebene mit δ, so ist:

$$\left.\begin{aligned} {}_A^rD_m &= {}_AD_m \cdot \frac{\sin\delta}{\sin(\delta + \bar{\nu})} \\ {}_B^rD_m &= {}_BD_m \cdot \frac{\sin\delta}{\sin(\delta + \bar{\nu})} \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

und man erhält:

$${}_AD_m \cdot \frac{\sin\delta}{\sin(\delta + \bar{\nu})} \cdot k - {}_BD_m \cdot \frac{\sin\delta}{\sin(\delta + \bar{\nu})} \cdot k + M_A + M_B = 0.$$

Die beiden auf diese Weise entstandenen Gleichungen:

$${}_AD_m + {}_BD_m = \frac{-M_m}{h_1 \cdot \sin\nu \cdot \cos\alpha}, \tag{80}$$

$${}_AD_m + {}_BD_m = -(M_A + M_B) \cdot \frac{\sin(\delta + \bar{\nu})}{k \cdot \sin\delta} \tag{81}$$

bieten die Möglichkeit, in einfachster Weise die Spannungen ${}_AD_m$ und ${}_BD_m$ zu ermitteln.

Es sind nun noch die Größen

$$\sin\nu, \quad \sin\delta, \quad \sin(\delta + \bar{\nu}), \quad k$$

durch die bekannten Werte auszudrücken. Zu diesem Zweck

betrachte man die wahre Größe des Vierecks $ABba$, für das die Entfernung der beiden Ringstäbe AB und ab beträgt:

$$g = \sqrt{f^2 + h^2}.$$

Weiter ist:

$$\nu = \bar{\nu},$$

$$\sin \nu = \frac{g}{\sqrt{g^2 + \frac{t^2}{4}}} = \frac{\sqrt{f^2 + h^2}}{\sqrt{f^2 + h^2 + \frac{t^2}{4}}},$$

$$\cos \nu = \frac{\frac{t}{2}}{\sqrt{f^2 + h^2 + \frac{t^2}{4}}}.$$

Da nun:

$$\delta + \bar{\nu} = 90^o + \varepsilon,$$

wenn ε den Winkel von Aa mit der in der Ebene $ABba$ in A senkrecht zu AB gezogenen Linie angibt, so ist:

$$\sin(\delta + \bar{\nu}) = + \cos \varepsilon,$$

$$\sin(\delta + \bar{\nu}) = + \frac{g}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{s-t}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{f^2 + h^2}}{\sqrt{\left(\frac{s-t}{2}\right)^2 + f^2 + h^2}}.$$

Ferner hat man:

$$\sin \delta = \frac{b}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{s-t}{2}\right)^2}},$$

wobei:

$$b = \frac{s}{2} \cdot \sin \nu,$$

also:

$$\sin \delta = \frac{\frac{s}{2} \cdot \sin \nu}{\sqrt{f^2 + h^2 + \left(\frac{s-t}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{s}{2} \cdot \frac{\sqrt{f^2 + h^2}}{\sqrt{\left\{f^2 + h^2 + \left(\frac{s-t}{2}\right)^2\right\} \cdot \left\{f^2 + h^2 + \frac{t^2}{4}\right\}}}.$$

Weiter ist:

$$k = VW \cdot \cos \gamma,$$

$$k = \frac{t}{2} \operatorname{tg} \zeta \cdot \cos \gamma,$$

worin:

$$\cos\gamma = \frac{SQ}{\sqrt{\overline{SQ}^2 + \overline{TQ}^2}} = \frac{\varrho_a \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\varrho_a \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{\cos^2\zeta}}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\zeta + 1}}.$$

Entsprechend ist:

$$\sin\gamma = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\zeta}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\zeta + 1}}.$$

Man findet hiernach für k:

$$k = \frac{t}{2} \cdot \operatorname{tg}\zeta \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\zeta + 1}}.$$

Setzt man die verschiedenen Werte in das Gleichungspaar (80, 81) ein, so werden die Gleichungen erhalten:

$$_AD_m + {}_BD_m = -M_m \cdot \frac{\sqrt{f^2 + h^2 + \frac{t^2}{4}}}{h_1 \cdot f}, \tag{82}$$

$$_AD_m - {}_BD_m =$$

$$= -(M_A + M_B) \cdot \frac{2}{s} \cdot \frac{2}{t} \cdot \frac{\sqrt{f^2 + h^2 + \frac{t^2}{4}} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\zeta + 1}}{\operatorname{tg}\zeta \cdot \operatorname{tg}\alpha}. \tag{83}$$

Daß man für die verschiedenen vorkommenden Größen

$$\sin\nu,\ \sin\delta\ \cdots$$

auch direkt die Zeichnung benützen kann, indem man $ABba$ in wahrer Größe aufzeichnet, bedarf keiner Erwähnung.

128. Um die zuletzt gewonnenen Formeln für den sofortigen Gebrauch aufzustellen, mögen schließlich noch die Momente M_m, M_A, M_B für beliebig wirkende Lasten angegeben werden. Wirkt in m eine lotrechte Kraft, so ist das Moment für die Achse $\alpha\beta$ der Stützungsebene gleich Null:

$$_vM_m = 0.$$

Bildet eine horizontale Kraft mit der Ebene $ab\alpha\beta$ den Winkel φ, so zerlegt man dieselbe in zwei Komponenten

$$H_m \cdot \cos\varphi$$

in Richtung von ab und

$$H_m \cdot \sin\varphi.$$

in Richtung senkrecht hierzu. Nur letztere liefert für die Achse $\alpha\beta$ einen Beitrag, so daß:

$$ {}_hM_m = H_m \cdot \sin\varphi \cdot h_1, $$

oder also:

$$ {}_AD_m + {}_BD_m = -H_m \cdot \sin\varphi \cdot \frac{\sqrt{f^2 + h^2 + \frac{t^2}{4}}}{f}. \tag{84} $$

Soll das Moment einer in A wirkenden **lotrechten** Kraft für die Achse uv aufgestellt werden, so spalte man diese Kraft V_A in eine Komponente in Richtung uv und eine senkrecht zu derselben. Nur die letztere ergibt ein Moment:

$$ {}_vM_A = V_A \cdot \sin\gamma \cdot \frac{t}{2} = V_A \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\zeta}}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\zeta + 1}}. \tag{85a} $$

Entsprechend ruft eine in B angreifende lotrechte Last V_B für uv das Moment hervor:

$$ {}_vM_B = -V_B \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\zeta}}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\zeta + 1}}. \tag{85b} $$

Um das Moment M_A und M_B für horizontale Kräfte H_A, H_B — die mit AB den Winkel ψ und $\overline{\psi}$ einschließen — am einfachsten zu erhalten, zerlegt man jede Kraft in zwei Komponenten (Abb. 172), von denen die eine in Richtung des Ringstabes AB, die andere in diejenige des benachbarten Rings KA bezw. BC fällt. Für das Moment bezüglich der Achse uv liefert jedesmal nur die Komponente in Richtung AB einen Beitrag. Diese maßgebende Kraftkomponente von H_A ist gegeben durch:

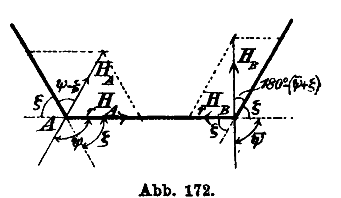


Abb. 172.

$$ {}_rH_A = H_A \cdot \frac{\sin(\psi - \zeta)}{\sin\zeta}; $$

sie ist also positiv, d. h. in Richtung von A nach B, solange

$$ \psi > \zeta $$

ist. Für ${}_rH_B$ findet sich:

$$ {}_rH_B = H_B \cdot \frac{\sin(\overline{\psi} + \zeta)}{\sin\zeta}. $$

Der Wert ist positiv (in der Richtung von B nach A!), sofern

$$(\overline{\psi} + \zeta) < 180^0, \quad \text{oder} \quad \psi < 180^0 - \zeta$$

ist; anderenfalls negativ.

Das äußere Moment einer in A und B gleichzeitig wirkenden Kraft H ist also dargestellt durch:

$$_hM_A + {}_hM_B = \left\{H_A \cdot \sin(\psi - \zeta) - H_B \cdot \sin(\psi + \zeta)\right\} \cdot \frac{k}{\sin \zeta},$$

wobei k dieselbe Größe besitzt, wie in Gl. 81, da ja $_rH_A$, $_rH_B$ denselben Hebelarm wie $^r_AD_m$ und $^r_BD_m$ haben. Es ergibt sich mit diesem Wert die Gleichung:

$$k\left\{^r_AD_m - {}^r_BD_m\right\} = -k\left\{H_A \cdot \sin(\psi - \zeta) - H_B \cdot \sin(\overline{\psi} + \zeta)\right\} \cdot \frac{1}{\sin \zeta},$$

oder, wenn $^r_AD_m$ und $^r_BD_m$ durch $_AD_m$ und $_BD_m$ selbst ausgedrückt werden (Gl. 79):

$$\left.\begin{aligned} ^r_AD_m &= \frac{s}{2 \cdot \sqrt{f^2 + h^2 + \frac{t^2}{4}}} \cdot {}_AD_m, \\ ^r_BD_m &= \frac{s}{2 \cdot \sqrt{f^2 + h^2 + \frac{t^2}{4}}} \cdot {}_BD_m, \end{aligned}\right\} \quad (86)$$

die folgende Formel:

$$\begin{aligned} &_AD_m - {}_BD_m = \\ &= -\left\{H_A \cdot \sin(\psi - \zeta) - H_B \cdot \sin(\overline{\psi} + \zeta)\right\} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{f^2 + h^2 + \frac{t^2}{4}}}{s \cdot \sin \zeta}. \end{aligned}$$

Bei dem vollständig symmetrischen Bau vorliegender Scheibenkuppel liegt der Gedanke nahe, die horizontal wirkenden Kräfte zu zerlegen in eine Komponente in Richtung des Radius und eine solche senkrecht dazu, so daß also an Stelle von H_A treten würden Y_A (nach dem Mittelpunkt) und X_A, an Stelle von H_B die Kräfte Y_B, X_B (Abb. 173). Die positive Richtung von Y sei nach dem Mittelpunkt gerichtet, diejenige von X nach links, wenn man gegen die Kuppel nach der Mitte schaut.

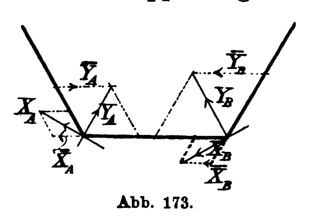


Abb. 173.

Um für diese Kräfte die Momente M_A und M_B aufzustellen, wird man jede derselben zerlegen in eine Komponente in Richtung AB und eine solche in derjenigen des benachbarten Rings KA bezw. BC. Erstere Komponenten besitzen die Größen:

$$\overline{X}_A = -\frac{X_A}{2 \cdot \cos\frac{\zeta}{2}}, \quad \overline{Y}_A = +\frac{Y_A}{2 \cdot \sin\frac{\zeta}{2}},$$

$$\overline{X}_B = +\frac{X_B}{2 \cdot \cos\frac{\zeta}{2}}, \quad \overline{Y}_B = +\frac{Y_B}{2 \cdot \sin\frac{\zeta}{2}},$$

wobei betr. des Punktes A das positive Vorzeichen die Richtung von A nach B, für Punkt B diejenige von B nach A angibt.

Die Momentengleichung lautet demgemäß:

$$k\left\{{}_A^rD_m + \frac{Y_A}{2 \cdot \sin\frac{\zeta}{2}} - \frac{X_A}{2 \cdot \cos\frac{\zeta}{2}} - {}_B^rD_m - \frac{Y_B}{2 \cdot \sin\frac{\zeta}{2}} - \frac{X_B}{2 \cdot \cos\frac{\zeta}{2}}\right\} = 0$$

oder:

$${}_AD_m - {}_BD_m =$$

$$= \left\{(X_A + X_B) \cdot \frac{1}{2 \cdot \cos\frac{\zeta}{2}} - (Y_A - Y_B) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin\frac{\zeta}{2}}\right\} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{f^2 + h^2 + \frac{t^2}{4}}}{s}.$$

Daß diese letztere Gleichung mit der obigen übereinstimmt, ergibt sich sofort, wenn man X_A, Y_A, X_B, Y_B durch H_A, H_B ausdrückt (Abb. 174):

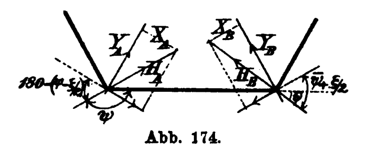


Abb. 174.

$$\left.\begin{aligned} X_A &= H_A \cdot \cos\left(\psi - \frac{\zeta}{2}\right), \quad Y_A = H_A \cdot \sin\left(\psi - \frac{\zeta}{2}\right), \\ X_B &= H_B \cdot \cos\left(\overline{\psi} + \frac{\zeta}{2}\right), \quad Y_B = H_B \cdot \sin\left(\overline{\psi} + \frac{\zeta}{2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (87)$$

129. Auf Grund der vorhergehenden Ausführungen dienen also zum Berechnen der Diagonalenpaare folgende Gleichungen:

1. wenn in m und A, B nur lotrechte Kräfte V_m, V_A, V_B wirken (vgl. Gleichungen 85):

$$\left.\begin{aligned} {}_AD_m + {}_BD_m &= 0, \\ {}_AD_m - {}_BD_m &= (V_A - V_B) \cdot \frac{2}{s} \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\zeta} \cdot \frac{\sqrt{f^2+h^2+\frac{t^2}{4}}}{\operatorname{tg}\zeta \cdot \operatorname{tg}\alpha}. \end{aligned}\right\} \quad (88)$$

2. wenn in m, A, B horizontale Kräfte wirken:

$$\left.\begin{aligned} {}_AD_m + {}_BD_m &= -H_m \cdot \sin\varphi \cdot \frac{\sqrt{f^2+h^2+\frac{t^2}{4}}}{f}, \\ {}_AD_m - {}_BD_m &= \\ = -\left\{H_A \cdot \sin(\psi-\zeta) - H_B \cdot \sin(\overline{\psi}+\zeta)\right\} &\cdot \frac{2}{s} \cdot \frac{\sqrt{f^2+h^2+\frac{t^2}{4}}}{\sin\zeta}. \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

wobei φ, ψ, $\overline{\psi}$ die Winkel angeben zwischen H_m, H_A, H_B und der nach rechts gerichteten Linie ab bezw. AB.

Werden Kräfte X und Y in oben angegebener Weise eingeführt, so lauten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} {}_AD_m + {}_BD_m &= -Y_m \cdot \frac{\sqrt{f^2+h^2+\frac{t^2}{4}}}{f}, \\ {}_AD_m - {}_BD_m &= \\ = \left\{(X_A+X_B) \cdot \frac{1}{\cos\frac{\zeta}{2}} - (Y_A - Y_B) \cdot \frac{1}{\sin\frac{\zeta}{2}}\right\} &\cdot \frac{1}{s} \cdot \sqrt{f^2+h^2+\frac{t^2}{4}}. \end{aligned}\right\} \quad (90)$$

Es haben sich auf diese Art recht einfache Gleichungspaare ergeben, die die Berechnung aller Diagonalspannungen ohne Schwierigkeit und rasch ermöglichen. Wirken nur lotrechte Kräfte, von denen die des Oberrings alle dieselbe Größe besitzen:

$$V_A = V_B = V_C = \cdots,$$

so erhalten alle Diagonalen die Spannung Null, indem die beiden Gleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} {}_AD_m + {}_BD_m &= 0, \\ {}_AD_m - {}_BD_m &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (91)$$

Wirken etwa auf eine Wand zwei gleiche Kräfte

$$H_A = H_B$$

mit derselben Richtung, so daß

$$\psi = \overline{\psi},$$

so vereinfacht sich die zweite Gleichung des Paares auf:

$$_AD_m - {}_BD_m = + H_A \cdot \cos\psi \cdot \frac{4}{s} \cdot \sqrt{f^2 + h^2 + \frac{t^2}{4}}. \qquad (92)$$

Nachdem mit Hilfe der allgemeinen Formeln für eine gegebene Belastung die Diagonalspannungen ermittelt sind, können die Spannungen der übrigen Stäbe leicht auf graphischem oder analytischem Wege gefunden werden, indem man zunächst die Knotenpunkte des Oberrings, dann die Eckpunkte und schließlich die Zwischenpunkte des Unterrings betrachtet. Es soll nun die analytische Berechnungsweise noch näher ins Auge gefaßt werden.

§ 36. Fortsetzung. Berechnung der anderen Stabspannungen. — Methode zur graphischen Berechnung.

130. Die Spannung eines Obergurtstabes, z. B. AB, kann man dadurch in einfacher Weise finden, daß man einen Flächenschnitt um A legt und alsdann die Summe der Momente aller um A wirkenden Kräfte für eine Achse in der Ebene $AKka$, z. B. Linie ka, aufstellt: die Momentengleichung wird nur das Moment der bei A angreifenden äußeren Kraft und die Spannung in AB ($_AR_B$) und Am ($_AD_m$) enthalten, also als einzige Unbekannte die Spannung in AB.

Zur Aufstellung der Momentengleichung wird man die Spannung in Am in zwei Komponenten $^r_AD_m$ und $^s_AD_m$ zerlegen in Richtung von AB und Aa, von denen nur die erstere einen Beitrag zum Moment für die Achse ak liefert. Besitzt die äußere Kraft (wie bei der Schwedler-Kuppel in Nr. 89) die drei Komponenten Z_A, $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, von denen erstere senkrecht nach abwärts verläuft, $\overline{X}_A$ horizontal in Richtung BA und $\overline{Y}_A$ horizontal senkrecht zu AB:

$$\overline{Y}_A = H_A \cdot \sin\psi \text{ (nach früherer Bezeichnung)},$$

so wirkt demnach in Richtung von AB eine Kraft:

$${}_A^r D_m + {}_A R_B - \overline{X}_A,$$

die in zwei Komponenten in Richtung AK und senkrecht dazu gespalten wird, von denen nur letztere einen Momentenbeitrag liefert. Entsprechendes gilt von der Kraft $\overline{Y}_A$ und man erhält die Gleichung:

$$\overline{Y}_A \cdot \cos\zeta \cdot h + ({}_A^r D_m + {}_A R_B - \overline{X}_A) \cdot \sin\zeta \cdot h + Z_A \cdot f = 0,$$

$${}_A R_B = \overline{X}_A - {}_A^r D_m - \overline{Y}_A \cdot \cot\zeta - Z_A \cdot \frac{f}{h \cdot \sin\zeta}.$$

Wird die äußere Kraft in drei Richtungen zerlegt, von denen die beiden horizontalen in den Radius (Y_A) und senkrecht dazu (X_A) fallen, so findet sich durch entsprechende Überlegung:

$$\left\{ Y_A \cdot \cos\frac{\zeta}{2} - X_A \cdot \sin\frac{\zeta}{2} + ({}_A^r D_m + {}_A R_B) \cdot \sin\zeta \right\} \cdot h$$
$$+ Z_A \cdot f = 0,$$

$${}_A R_B = X_A \cdot \frac{\sin\frac{\zeta}{2}}{\sin\zeta} - {}_A^r D_m - Y_A \cdot \frac{\cos\frac{\zeta}{2}}{\sin\zeta} - Z_A \cdot \frac{f}{h \cdot \sin\zeta},$$

oder anders geschrieben:

$${}_A R_B = \frac{X_A}{2} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\zeta}{2}} - {}_A^r D_m - \frac{Y_A}{2} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\zeta}{2}} - \frac{Z_A}{2} \cdot \frac{f}{h \cdot \sin\frac{\zeta}{2} \cdot \cos\frac{\zeta}{2}}, \quad (93)$$

wobei die Werte ${}^r D$ mittels der Gleichungen (86) durch D auszudrücken sind.

Statt mit der Momentenmethode könnte man diese Gleichungen auch nach der Projektionsmethode gewinnen, indem man die Summe aller Komponenten in Richtung senkrecht zur Ebene $AKka$ aufstellt.

131. Die Spannung der Gratstäbe, z. B. Aa, findet man bequem aus der Bedingung, daß die Summe der Vertikalkräfte an dem betreffenden oberen Knotenpunkt, z. B. A, verschwinden muß. Man zerlegt zur Aufstellung der Gleichung die Spannungen in Ar und Am in zwei Komponenten in Richtungen des betreffenden Oberringstabes KA bezw. AB (${}_A^r D_r$, ${}_A^r D_m$) und des

Gratstabes Aa $({}_A^sD_r,\ {}_A^sD_m)$. In letzterer Richtung wirken alsdann:

$$ {}_AG_a + {}_A^sD_m + {}_A^sD_r, $$

wenn ${}_AG_a$ die Gratspannung bedeutet. Da nun die verschiedenen wagrechten Kräfte

$$ {}_A^rD_r,\quad {}_A^rD_m,\quad {}_KR_A,\quad {}_AR_B,\quad X,\quad Y $$

keine Komponenten in senkrechter Richtung liefern, so ergibt sich:

$$ \sin\chi\cdot({}_AG_a + {}_A^sD_m + {}_A^sD_r) + Z_A = 0, $$

wenn χ den Neigungswinkel des Gratstabes gegen den Horizont bedeutet, also:

$$ \sin\chi = \frac{h}{aA} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \dfrac{f^2}{\cos^2\dfrac{\zeta}{2}}}} = \frac{h\cdot\cos\dfrac{\zeta}{2}}{\sqrt{f^2 + h^2\cdot\cos^2\dfrac{\zeta}{2}}}. \qquad (94) $$

Obige Gleichung nach ${}_AG_a$ aufgelöst, liefert schließlich:

$$ {}_AG_a = -\left\{{}_A^sD_m + {}_A^sD_r + Z_A\cdot\frac{1}{\sin\chi}\right\}, $$

$$ {}_AG_a = -\left\{{}_A^sD_m + {}_A^sD_r + Z_A\cdot\frac{\sqrt{f^2 + h^2\cdot\cos^2\dfrac{\zeta}{2}}}{h\cdot\cos\dfrac{\zeta}{2}}\right\}, \qquad (95) $$

wobei zu bedenken, daß die Werte ${}^sD$ mittels folgender Gleichung durch D ausdrückbar sind:

$$ {}^sD = D\cdot\frac{\sin\bar{\nu}}{\sin(\delta + \bar{\nu})}, $$

$$ {}^sD = D\cdot\frac{\sqrt{f^2 + h^2 + \left(\dfrac{s-t}{2}\right)^2}}{\sqrt{f^2 + h^2 + \dfrac{t^2}{4}}}. \qquad (96) $$

132. Die Spannungen der Unterringstäbe können in ähnlicher Weise ermittelt werden, wie die der Oberringstäbe. Um z. B. die Spannung in am zu finden, stelle man das Moment aller um den Knotenpunkt a liegenden Kräfte auf bezüglich

der Achse $\varkappa\alpha$. In Richtung von am wirkt jetzt — bei Einführung der Komponenten $\overline{X}_a$, $\overline{Y}_a$ — die Kraft

$$({}_aR_m - \overline{X}_a);$$

dieselbe ist in zwei Komponenten zu zerlegen in Richtung ka und senkrecht dazu; nur letztere

$$({}_aR_m - \overline{X}_a) \cdot \sin\zeta$$

liefert einen Momentenbeitrag. Von der Kraft $\overline{Y}_a$ kommt nur die Komponente

$$\overline{Y}_a \cdot \cos\zeta$$

in Betracht. Die Kraft Z_a ruft kein Moment hervor, da sie die Achse schneidet. Es fehlt noch die Kraft ${}_AG_a$; man zerlege sie in zwei Komponenten: senkrecht und wagrecht; und letztere mit der Größe

$${}_AG_a \cdot \cos\chi$$

wieder in zwei Komponenten in Richtung ka und senkrecht dazu; nur letztere mit dem Werte

$${}_AG_a \cdot \cos\chi \cdot \cos\frac{\zeta}{2}$$

ergibt einen Momentenbeitrag und man erhält schließlich die Gleichung:

$$({}_aR_m - \overline{X}_a) \cdot \sin\zeta \cdot h_1 + \overline{Y}_a \cdot \cos\zeta \cdot h_1 + {}_AG_a \cdot \cos\chi \cdot \cos\frac{\zeta}{2} \cdot h_1 = 0,$$

$${}_aR_m = \overline{X}_a - \overline{Y}_A \cdot \cot\zeta - {}_AG_a \cdot \cos\chi \cdot \frac{\cos\frac{\zeta}{2}}{\sin\zeta}.$$

Werden die Horizontalkomponenten der äußeren Kraft, Y und X, in Richtung des Radius und senkrecht dazu eingeführt, so findet sich die Gleichung:

$${}_aR_m \cdot \sin\zeta - X_a \cdot \sin\frac{\zeta}{2} + ({}_AG_a \cdot \cos\chi + Y_a) \cdot \cos\frac{\zeta}{2} = 0,$$

$${}_aR_m = -\left\{{}_AG_a \cdot \cos\chi + Y_a\right\} \cdot \frac{\cos\frac{\zeta}{2}}{\sin\zeta} + X_a \cdot \frac{\sin\frac{\zeta}{2}}{\sin\zeta},$$

$${}_aR_m = -\left\{{}_AG_a \cdot \cos\chi + Y_a\right\} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin\frac{\zeta}{2}} + X_a \cdot \frac{1}{2 \cdot \cos\frac{\zeta}{2}}. \quad (97)$$

In ganz entsprechender Weise läßt sich die Spannung in den rechten Teilringstäben

$$mb, \ nc \ \cdots$$

darstellen; so ergibt sich z. B. für die Spannung in ar unter Zugrundelegung der zuletzt eingeführten X- und Y-Richtung:

$$ {}_aR_r = -\{{}_AG_a \cdot \cos\chi + Y_a\} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin\frac{\xi}{2}} - X_a \cdot \frac{1}{2 \cdot \cos\frac{\xi}{2}} \cdot \quad (98)$$

133. Die in den Kugellagern (lotrechten Stützungsstäben) auftretenden Kräfte werden in einfachster Weise gefunden, indem man an $a, b \cdots$ die Summe der Vertikalkräfte gleich Null setzt. Wird die Zugkraft der Stützungsstäbe (nach abwärts) als positiv ($\overline{V}$) eingeführt, so liefert z. B. Punkt a:

$$ {}_AG_a \cdot \sin\chi - \overline{V}_a - Z_a = 0,$$

$$\overline{V}_a = + {}_AG_a \cdot \sin\chi - Z_a. \quad (99^a)$$

Die hier positiv eingeführte Spannung würde eine negative Auflagerkraft bedeuten, da diese gewöhnlich nach oben als positiv angenommen wird. Für den positiven Auflagerdruck ergibt sich:

$$V_a = - {}_AG_a \cdot \sin\chi + Z_a. \quad (99^b)$$

134. Es fehlen schließlich noch die Reaktionen der Gleitlager in $m, n \cdots$, oder also die Spannungen in den paarweise angeordneten Stützungsstäben. Im Punkte m wirke eine Kraft, deren Vertikalkomponente Z_m nach abwärts gerichtet ist, deren X-Komponente mit mb zusammenfällt, während die Y-Komponente senkrecht dazu verläuft. Die Spannungen in Am und Bm sind bekannt; ihre Komponenten in der Richtung amb haben die Größen

$$ {}_AD_m \cdot \cos\nu \quad \text{bezw.} \quad {}_BD_m \cdot \cos\nu,$$

während diejenigen senkrecht dazu in Ebene $ABba$ den Wert besitzen:

$$ {}_AD_m \cdot \sin\nu \quad \text{und} \quad {}_BD_m \cdot \sin\nu.$$

In der senkrechten Stützungsebene (so möge sie hier eingeführt werden) treten von den letzteren Komponenten nur die Anteile auf:

$$ {}_AD_m \cdot \sin\nu \cdot \sin\alpha \quad \text{und} \quad {}_BD_m \cdot \sin\nu \cdot \sin\alpha, $$

so daß im ganzen am Knotenpunkt m in der lotrechten Ebene die Kräfte vorhanden sind:

$$ {}_bR_m,\quad {}_aR_m,\quad {}_AD_m \cdot \cos\nu,\quad {}_BD_m \cdot \cos\nu, $$
$$ ({}_AD_m + {}_BD_m) \cdot \sin\nu \cdot \sin\alpha,\quad Z,\quad X $$

und die Spannungen der Stützungsstäbe ${}_mS_\alpha$, ${}_mS_\beta$.

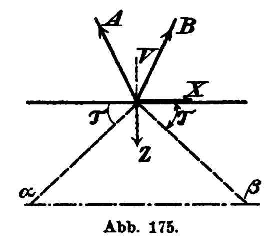


Abb. 175.

In dieser Ebene stelle man nun die Gleichgewichtsbedingungen auf:

1. Summe der Kräfte in Richtung senkrecht zu $m\beta$ muß verschwinden;
2. diejenige der Kräfte in Richtung senkrecht zu $m\alpha$ muß ebenfalls Null ergeben (Abb. 175):[1])

$$ \begin{aligned} 1.\quad & {}_BD_m \cdot \cos\nu \cdot \sin\tau - {}_AD_m \cdot \cos\nu \cdot \sin\tau + X_m \cdot \sin\tau \\ & + {}_bR_m \cdot \sin\tau - {}_aR_m \cdot \sin\tau \\ & - Z_m \cdot \cos\tau + ({}_AD_m + {}_BD_m) \cdot \sin\nu \cdot \sin\alpha \cdot \cos\tau \\ & - {}_mS_\alpha \cdot \sin 2\tau = 0. \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} 2.\quad & {}_AD_m \cdot \cos\nu \cdot \sin\tau - {}_BD_m \cdot \cos\nu \cdot \sin\tau - X_m \cdot \sin\tau \\ & + {}_aR_m \cdot \sin\tau - {}_bR_m \cdot \sin\tau \\ & - Z_m \cdot \cos\tau + ({}_AD_m + {}_BD_m) \cdot \sin\nu \cdot \sin\alpha \cdot \cos\tau \\ & - {}_mS_\beta \cdot \sin 2\tau = 0. \end{aligned} $$

Man findet demnach:

$$ \begin{aligned} {}_mS_\alpha \cdot \sin 2\tau &= \{({}_BD_m - {}_AD_m) \cdot \cos\nu + {}_bR_m - {}_aR_m + X_m\} \cdot \sin\tau \\ & \quad + \{- Z_m + ({}_AD_m + {}_BD_m) \cdot \sin\nu \cdot \sin\alpha\} \cdot \cos\tau, \\ {}_mS_\beta \cdot \sin 2\tau &= \{({}_AD_m - {}_BD_m) \cdot \cos\nu + {}_aR_m - {}_bR_m - X_m\} \cdot \sin\tau \\ & \quad + \{- Z_m + ({}_AD_m + {}_BD_m) \cdot \sin\nu \cdot \sin\alpha\} \cdot \cos\tau, \end{aligned} $$

---

[1]) In dieser und der folgenden Abbildung wurde irrtümlich im Gegensatz zu der vorhergehenden Angabe die Kraft X nach rechts eingeführt, und es beziehen sich demgemäß die folgenden Formeln, auch (100), (101), auf rechts wirkende Kraft; bei links wirkender Last ist das Vorzeichen von X umzukehren; vgl. Nr. 140.

wobei Zugspannungen positiv, Druckspannungen negativ eingeführt sind.

Es wurden hier absichtlich die Stützungsstäbe in der gezeichneten Lage beibehalten, um so den Fall zu erledigen, daß dieselben wirklich vorhanden sind, etwa zur Stützung eines oberen Kuppelteiles mittels eines Stützengeschosses auf einer unteren Kuppel (vgl. die dreigeschossige Zimmermannsche Kuppel!). Handelt es sich nur darum, die Kräfte der Auflager zu bestimmen, so läßt sich die Aufgabe wesentlich einfacher lösen, indem man die beiden Stützungsstäbe horizontal und vertikal, also in Richtung der horizontalen und vertikalen Lagerreaktion, einführt, oder mit diesen selbst rechnet (Abb. 176).

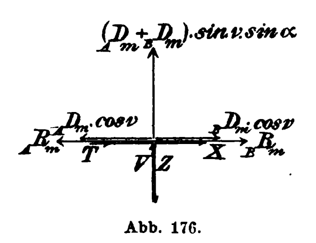


Abb. 176.

Führt man als positiv die Richtung nach oben ein (V), bezw. diejenige nach rechts (T), so erhält man:

$$V_m = Z_m - ({}_AD_m + {}_BD_m) \cdot \sin v \cdot \sin \alpha, \quad (100)$$

$$T_m = {}_aR_m - {}_bR_m + ({}_AD_m - {}_BD_m) \cdot \cos v - X. \quad (101)$$

Hiermit sind denn für alle Stabspannungen und Auflagerkräfte allgemeine Formeln aufgestellt unter Zugrundelegung eines ganz allgemeinen Belastungsfalles. Die Frage, bei welcher Belastung die einzelnen Stäbe die größte Beanspruchung erhalten werden, erledigt sich mittels dieser Formeln, da man sie leicht so umändern kann, daß sich jede Spannung als lineare Funktion der allgemeinen Kräfte X, Y, Z darstellt und so den Einfluß jeder Einzellast erkennen läßt. Auf die nähere Untersuchung soll hier nicht eingegangen werden, zumal in praktischen Fällen die Verhältnisse meistens so liegen, daß es sich nur um einzelne Belastungssysteme handelt.

135. Für die Spannungsbestimmung dieser Scheibenkuppel kann man auch eine rein graphische Methode verwenden, die Föppl zur Berechnung seiner Leipziger Kuppel benutzte,[1])

[1]) D. Fachw. i. R., S. 93. — D. graph. Statik.

und die in diesem Buch im wesentlichen schon beim Stabilitätsnachweis angewandt wurde (S. 259).

Es möge eine einzige, beliebig gerichtete Last in einem Knotenpunkt, z. B. A, einer viereckigen Kuppel wirken (Abb. 177).

Man sucht nun zunächst nach den früheren Angaben die Stäbe auf, die spannungslos sind. Das sind vor allem die Stäbe jedes ebenen Felddreiecks, an dessen Knotenpunkten keine Kräfte wirken, also des oberen und rechts gelegenen Dreiecks. Alsdann folgt, daß auch im Gratstab Cc, wie in den Stäben co, cn, $c\gamma$ keine Spannungen auftreten. Man denke sich nun das Dreieck ABm herausgeschnitten; an Punkt A wirkt eine äußere Kraft und die Spannungen der drei durchschnittenen Stäbe Aa, Ap, AD. Die Resultante R_A dieser vier Kräfte kennt man zunächst nicht, da sie bei allgemeiner Lage von P_A nicht mehr in die Linie Aa fallen wird; man weiß nur, daß sie durch A hindurchgeht und in der Ebene ABm liegt. Andrerseits kennt man aber die Lage der Resultante R_B der bei B geschnittenen Stäbe, die in der Linie Bb liegt, und diejenige R_m der bei m getroffenen Stäbe, die in die Richtung amb fällt; es ist also auch der Schnittpunkt dieser beiden Resultanten bekannt: d. i. Punkt b. Da nun die beiden letzten Resultanten Gleichgewicht halten sollen mit derjenigen bei A, muß diese durch den Schnittpunkt von R_B und R_m, also durch b hindurchgehen; demnach ist die Richtung von R_A gegeben durch die Verbindungslinie von A mit b. Da aber diese Resultante R_A (von P_A, AD, Ap, Aa) gleich und entgegengesetzt gerichtet sein muß derjenigen von AB und Am, so fällt auch die Resultante von AB und Am in die Richtung Ab.

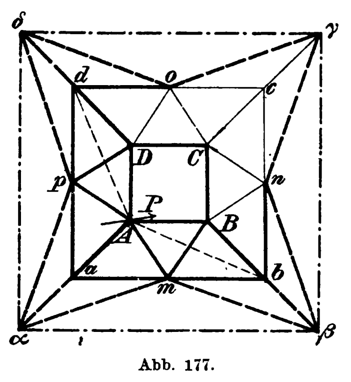


Abb. 177.

Führt man eine entsprechende Betrachtung für das linksgelegene Dreieck DAp durch, so findet sich, daß die Resultante

der Spannungen in Ap und AD in die Linie Ad fallen muß. Man kennt hiernach an Knotenpunkt A drei Richtungslinien Aa, Ad, Ab, in denen Kräfte wirken, die mit P_A Gleichgewicht halten müssen, kann demgemäß diese Kräfte finden. Durch weitere Zerlegung der Kraft in Ad findet sich die Spannung in AD und Ap, entsprechend durch Zerlegung der Kraft in Ab die Spannung in AB und Am. Nach Ermittlung dieser Spannungen geht man zu Knotenpunkt B bezw. D, findet hier die Spannung in Bm und Bb, bezw. Dp, Dd und kann dann weiter an den Punkten b, a, d die Spannungen in den noch fehlenden Unterring- und einzelnen Stützungsstäben finden, schließlich an $m, n, \cdots$ die Kräfte in den Rollenlagerstäben.

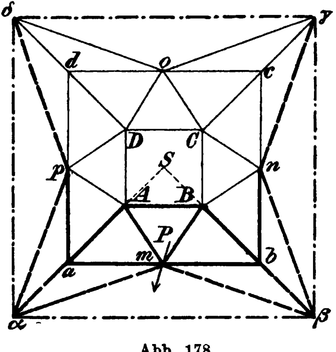


Abb. 178.

Wirkt in einem Zwischenpunkt, z. B. m (Abb. 178), eine Kraft (P_m), so weiß man zunächst, daß die Dreiecksstäbe in den drei anderen oberen Ebenen die Spannungen Null haben, woraus weiter folgt, daß auch die Gratstäbe Cc, Dd und die von c und d auslaufenden Unterring- und Stützungsstäbe, wie auch die Lagerstäbe bei o keine Spannungen erhalten. Schneidet man nun das Dreieck AmB heraus, so müssen wieder die Spannungen der getroffenen Stäbe mit P_m Gleichgewicht halten, also

$$Aa,\ Bb,\ ma,\ mb,\ m\alpha,\ m\beta \text{ und } P_m;$$

oder anders ausgedrückt, es muß sich die Resultante von Aa und Bb aufheben gegen diejenige (R_m) von P_m und der bei m geschnittenen Stäbe. Da aber erstere durch den Schnittpunkt S von Aa und Bb gehen muß, so ist letztere gegeben durch die Linie mS. R_m ist jedoch gleich und entgegengesetzt gerichtet der Resultante von mA und mB, es stellt also Sm auch die Richtungslinie der Resultante von mA und mB dar.

Es muß hiernach Gleichgewicht bestehen an Knoten-

punkt m zwischen der letzterwähnten Resultante, ferner P_m und den Spannungen

$$am, \quad \alpha m, \quad \beta m, \quad bm,$$

die in der Ebene $AB\beta\alpha$ liegen, und man hat demgemäß die Kraft P_m in Gleichgewicht zu setzen mit einer solchen in der Richtung mS und einer in der Ebene $ba\alpha\beta$ und dann die in mS erhaltene Kraft in die Richtungen mA und mB zu zerlegen, um diese Spannungen zu finden. Hierauf ermittelt man an den Punkten A und B die Spannung in den Gratstäben Aa, Bb und im Stabe AB, weiter an den Knotenpunkten a, b, m, n, p die noch fehlenden Spannungen. Die dünn ausgezogenen Stäbe stellen die spannungslosen dar.

Wirkt schließlich eine Kraft in einem der unteren Eckpunkte, z. B. a, so ist die Untersuchung sehr einfach durchzuführen, indem nur die von a auslaufenden Unterringstäbe pa, ma, der Stützungsstab $a\alpha$ und die benachbarten Paare von Stützungsstäben $p\delta$, $p\alpha$, bezw. $m\alpha$, $m\beta$ Spannungen erhalten.

Wenn eine Reihe von Kräften wirkt, so muß man bei diesem Verfahren für jede Last die Spannungen besonders ermitteln und die so gefundenen Werte zusammenfügen.

§ 37. Durchführung von Zahlenbeispielen für die einfache Scheibenkuppel.

136. Es mögen in diesem Paragraphen für eine vorliegende Kuppel über regelmäßig-sechseckigem Raum die Spannungen zahlenmäßig berechnet werden unter Zugrundelegung

1. einer nur lotrechten, symmetrischen Belastung,
2. einer wagrechten Belastung.

Die Kuppel (Abb. 179 in Nr. 138) besitze eine Höhe von 5 m; die Seite des zu überdeckenden Raumes sei 10 m; die horizontale Entfernung zwischen einer Unterring- und einer entsprechenden Oberringseite betrage 3 m. Bei Einführung der früheren Bezeichnungen ist demnach das Kuppelsystem festgelegt durch:

$$\zeta = 60^0, \qquad h = 5 \text{ m},$$
$$s = 10 \text{ m}, \qquad f = 3 \text{ m}.$$

Daraus bestimmt sich die Länge der Oberringseite:

$$\frac{t}{2} = \frac{s}{2} - f \cdot \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2}$$
$$= 5 - 3 \cdot 0{,}5774 = 5 - 1{,}732,$$
$$t = 6{,}536.$$

Der Neigungswinkel einer Wand gegen die Horizontale ist gegeben durch:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3} = 1{,}6667,$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{25 + 9}} = \frac{5}{5{,}83} = 0{,}858,$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5{,}83} = 0{,}5146.$$

Von Wichtigkeit sind weiter folgende Werte:

$$\sin \zeta = 0{,}866,$$
$$\cos \zeta = 0{,}500,$$
$$\operatorname{tg} \zeta = 1{,}732,$$
$$\operatorname{cotg} \zeta = 0{,}5774,$$

$$\frac{\sqrt{f^2 + h^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2}}{f} = \frac{\sqrt{9 + 25 + 3{,}27^2}}{3} = \frac{6{,}69}{3} = 2{,}23,$$

$$\frac{\sqrt{f^2 + h^2 + \frac{t^2}{4}}}{h} = \frac{6{,}69}{5} = 1{,}34,$$

$$\frac{s}{2 \cdot \sqrt{f^2 + h^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2}} = \frac{10}{2 \cdot 6{,}69} = 0{,}75,$$

$$\frac{f}{h \cdot \sin \frac{\zeta}{2} \cdot \cos \frac{\zeta}{2}} = \frac{3}{5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3}} = 1{,}386,$$

$$\cos \chi = \frac{f}{\sqrt{f^2 + h^2 \cdot \cos^2 \frac{\zeta}{2}}} = 0{,}57,$$

$$\sin \chi = \frac{h \cdot \cos \frac{\zeta}{2}}{\sqrt{f^2 + h^2 \cdot \cos^2 \frac{\zeta}{2}}} = 0{,}822,$$

wenn χ den Winkel der Gratstäbe $Aa \cdots$ gegen die Horizontalebene darstellt.

1. Auf die Kuppel wirken nur lotrechte Lasten.

137. Die Kräfte in den oberen Knotenpunkten seien alle einander gleich, ebenso diejenigen in den unteren, und zwar

$$Z_A = Z_B = \cdots = Z_K = 1000 \text{ kg},$$
$$Z_a = Z_b = \cdots = Z_k = 800 \text{ kg},$$
$$Z_m = Z_n = \cdots = Z_r = 800 \text{ kg}.$$

Für das Diagonalenpaar Am, Bm gelten nach Gl. (91) die Formeln:

$$\begin{array}{c} {}_AD_m + {}_BD_m = 0 \\ {}_AD_m - {}_BD_m = 0 \\ \hline {}_AD_m = {}_BD_m = 0. \end{array}$$

Ebenso erhalten auch sämtliche andere Diagonalen die Spannung Null:

$${}_AD_m = {}_BD_m = {}_BD_n = {}_CD_n = \cdots = {}_KD_r = {}_AD_r = 0.$$

Die Oberringstäbe werden bei der vorliegenden symmetrischen Belastung ebenfalls alle gleichgroße Spannungen erhalten; es findet sich nach Gl. (93):

$$\begin{aligned} {}_AR_B = {}_AR_K &= -\frac{Z_A}{\sin\zeta}\cdot\frac{f}{h} \\ &= -\frac{Z_A}{0,866}\cdot\frac{3}{5} = -1000\cdot\frac{3}{5\cdot 0,866}, \\ {}_AR_B = {}_AR_K &= -693 \text{ kg}, \end{aligned}$$

also demnach:

$${}_AR_B = {}_BR_C = \cdots = {}_KR_A = -693 \text{ kg}.$$

Für die Gratspannungen erhält man nach Gl. (95):

$$\begin{aligned} {}_AG_a = -\frac{Z_A}{\sin\chi} &= -Z_A\cdot\frac{\sqrt{h^2+\dfrac{f^2}{\cos^2\dfrac{\zeta}{2}}}}{h} \\ &= -Z_A\cdot\sqrt{1,48} = -1000\cdot 1,22, \end{aligned}$$

oder:

$$ {}_AG_a = {}_BG_b = \cdots = {}_KG_k = -1220 \text{ kg}. $$

Die Spannungen in den Unterringstäben sind natürlich auch wieder alle einander gleich; man findet sie sofort aus der Formel (97):

$$ {}_aR_m = -{}_AG_a \cdot \frac{\cos\chi}{2\cdot\sin\frac{\zeta}{2}} $$

$$ = +\frac{Z_A}{\sin\chi}\cdot\frac{\cos\chi}{2\cdot\sin\frac{\zeta}{2}} = Z_A\cdot\frac{\operatorname{cotg}\chi}{2\cdot\sin\frac{\zeta}{2}} = \frac{Z_A}{\sin\zeta}\cdot\frac{f}{h}, $$

$$ {}_aR_m = {}_mR_b = {}_bR_n = \cdots = {}_kR_r = {}_rR_a = \frac{1000}{0{,}866}\cdot\frac{3}{5} = 692 \text{ kg}. $$

Ferner ergibt sich für die vertikalen Lagerreaktionen:

$$ V_a = V_b = \cdots = V_k = Z_a - {}_AG_a\cdot\sin\chi = Z_a + Z_A, $$

$$ V_a = V_b = \cdots = V_k = 1800 \text{ kg}, $$

$$ V_m = V_n = \cdots = V_r = Z_m = 800 \text{ kg}. $$

Wagrechte Reaktionen treten keine auf:

$$ H_m = H_n = \cdots = H_r = 0. $$

Daß die Summe der vertikalen Auflagerkräfte gleich derjenigen der Lasten ist, geht schon aus den Ansätzen für $V_a \cdots$, $V_m \cdots$ hervor. Ebenso ist die Bedingung erfüllt, daß die wagrechten Kräfte sich gegenseitig aufheben, da sie alle den Wert Null besitzen.

2. Belastung durch horizontale Kräfte.

138. Alle horizontalen Kräfte mögen in der Richtung senkrecht zu AB wirken und nur an der vorderen Hälfte des Systems angreifen, einem Wind entsprechend, der von vorn gegen die Kuppel weht. Es sei:

$$ H_A = H_B = 2400 \text{ kg}, \qquad H_K = H_C = 800 \text{ kg}, $$

$$ H_a = H_b = 1400 \text{ kg}, \qquad H_k = H_c = 450 \text{ kg}, $$

$$ H_m = 1800 \text{ kg}, \qquad H_n = H_r = 900 \text{ kg}. $$

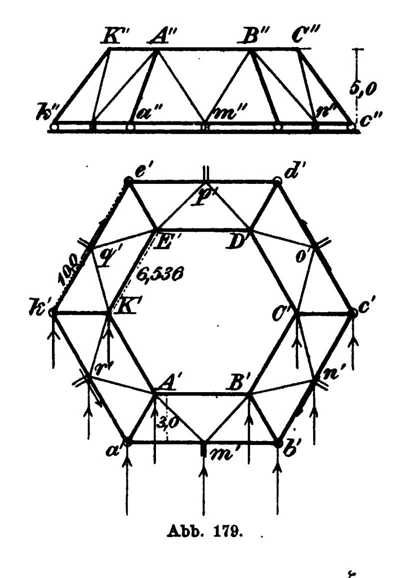


Abb. 179.

Man könnte mit diesen Werten auf Grund der Gleichung (89) sofort die Diagonalspannungen und dann die übrigen Stabkräfte ermitteln. Statt dieses **einfachsten** Weges möge aber hier, wie dies auch bei allgemeinerer Belastung nahe liegt, jede Kraft zerlegt werden in zwei Komponenten: Y in Richtung nach dem Mittelpunkt und X senkrecht hierzu, positiv eingeführt bei Wirkung von rechts nach links (gegen die Kuppel schauend). Es ergibt sich:

$$X_A = + H_A \cdot \sin\frac{\zeta}{2}, \qquad Y_A = + H_A \cdot \cos\frac{\zeta}{2},$$

$$X_B = - H_B \cdot \sin\frac{\zeta}{2}, \qquad Y_B = + H_B \cdot \cos\frac{\zeta}{2},$$

$$X_K = + H_K, \qquad Y_K = 0,$$

$$X_C = - H_C, \qquad Y_C = 0,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

oder in Zahlenwerten:

$$X_A = + 1200 \text{ kg}, \qquad Y_A = + 2080 \text{ kg},$$

$$X_B = - 1200 \text{ kg}, \qquad Y_B = + 2080 \text{ kg},$$

$$X_K = + 800 \text{ kg}, \qquad Y_K = 0,$$

$$X_C = - 800 \text{ kg}, \qquad Y_C = 0,$$

$$X_m = 0, \qquad Y_m = + 1800 \text{ kg},$$

$$X_r = + 780 \text{ kg}, \qquad Y_r = + 450 \text{ kg},$$

$$X_n = - 780 \text{ kg}, \qquad Y_n = + 450 \text{ kg},$$

$$X_a = + 700 \text{ kg}, \qquad Y_a = + 1212 \text{ kg},$$

$$X_b = - 700 \text{ kg}, \qquad Y_b = + 1212 \text{ kg},$$

$$X_k = + 450 \text{ kg}, \qquad Y_k = 0,$$

$$X_c = - 450 \text{ kg}, \qquad Y_c = 0.$$

Die Spannungen in den verschiedenen Diagonalenpaaren berechnen sich auf Grund der Gleichungen (90):

$$ {}_A D_m + {}_B D_m = - Y_m \cdot \frac{\sqrt{f^2 + h^2 + \frac{t^2}{4}}}{f}, $$

$$ {}_A D_m - {}_B D_m = $$

$$ = \left\{ (X_A + X_B) \cdot \frac{1}{\cos \frac{\xi}{2}} - (Y_A - Y_B) \cdot \frac{1}{\sin \frac{\xi}{2}} \right\} \cdot \frac{\sqrt{f^2 + h^2 + \frac{t^2}{4}}}{s}, $$

die mit Berücksichtigung der vorliegenden Kuppelgestalt übergehen in (vgl. S. 289):

$$ {}_A D_m + {}_B D_m = - Y_m \cdot 2{,}23, $$

$$ {}_A D_m - {}_B D_m = \{ (X_A + X_B) \cdot 1{,}1548 - (Y_A - Y_B) \cdot 2 \} \cdot 0{,}67 $$

beziehungsweise:

$$ {}_A D_m - {}_B D_m = \{ (X_A + X_B) \cdot 0{,}5774 - (Y_A - Y_B) \} \cdot 1{,}34. $$

Man erhält demgemäß:

$$ {}_A D_m + {}_B D_m = - 1800 \cdot 2{,}23 = - 4014 \text{ kg} $$

$$ {}_A D_m - {}_B D_m = \quad 0 - 0 = \quad 0 \text{ kg} $$

$$ {}_A D_m = {}_B D_m = - 2007 \text{ kg}. $$

Weiter ist:

$$ {}_B D_n + {}_C D_n = - 450 \cdot 2{,}23 = - 1004 \text{ kg}, $$

$$ {}_B D_n - {}_C D_n = \{ (X_B + X_C) \cdot 0{,}5774 - (Y_B - Y_C) \} \cdot 1{,}34 $$

$$ = \{ - 2000 \cdot 0{,}5774 - 2080 \} \cdot 1{,}34, $$

$$ {}_B D_n - {}_C D_n = - 4335, $$

demnach:

$$ {}_B D_n = - 2670 \text{ kg}, \qquad {}_C D_n = + 1666 \text{ kg}. $$

Für das symmetrisch gelegene Diagonalenpaar Ar, Kr müssen sich die gleichen Werte ergeben:

$$ {}_K D_r + {}_A D_r = - Y_r \cdot 2{,}23 = - 450 \cdot 2{,}23 = - 1004 \text{ kg}, $$

$$ {}_K D_r - {}_A D_r = \{ (X_K + X_A) \cdot 0{,}5774 - (Y_K - Y_A) \} \cdot 1{,}34 $$

$$ = \{ + 2000 \cdot 0{,}5774 + 2080 \} \cdot 1{,}34 = + 4335, $$

oder:

$$ {}_K D_r = +1666 \text{ kg}, \qquad {}_A D_r = -2670. $$

Des weiteren hat man:

$$ {}_C D_o + {}_D D_o = 0, $$

$$ {}_C D_o - {}_D D_o = \{(X_C + X_D) \cdot 0{,}5774 - (Y_C - Y_D)\} \cdot 1{,}34 $$
$$ = \{-800 \cdot 0{,}5774 - 0\} \cdot 1{,}34, $$
$$ {}_C D_o - {}_D D_o = -619 \text{ kg}, $$

also:

$$ {}_C D_o = -310 \text{ kg}, \qquad {}_D D_o = +310 \text{ kg}. $$

Entsprechend findet sich für das symmetrisch gelegene Paar:

$$ {}_E D_q = +310 \text{ kg}, \qquad {}_K D_q = -310 \text{ kg}. $$

Für die noch fehlenden Diagonalen Ep und Dp ergeben sich die Spannungen Null, da weder in E, noch D, noch p Kräfte angreifen:

$$ {}_D D_p = {}_E D_p = 0. $$

139. Zur Ermittlung der Ringspannungen benötigt man die Komponenten ${}^r D$ der Diagonalspannungen in der Ringrichtung. Nach Gleichung (86) ist:

$$ {}_A^r D_m = {}_A D_m \cdot \frac{\sin \delta}{\sin(\delta + \nu)} $$
$$ = \frac{s}{2 \cdot \sqrt{f^2 + h^2 + \frac{t^2}{4}}} \cdot {}_A D_m $$

Bei Einsetzung der Werte erhält man:

$$ {}_A^r D_m = 0{,}75 \cdot {}_A D_m. $$

Entsprechende Formeln gelten für die übrigen Diagonalen:

Man hat nun nach Gl. (93) für die Ringspannung in AB den Wert:

$$ {}_A R_B = \frac{X_A}{2} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\zeta}{2}} - 0{,}75 \cdot {}_A D_m - \frac{Y_A}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\zeta}{2}} $$
$$ - \frac{Z_A}{2} \cdot \frac{f}{h \cdot \sin \frac{\zeta}{2} \cdot \cos \frac{\zeta}{2}}; $$

das letzte Glied fällt bei nur wagrechten Lasten fort, und es findet sich der Ausdruck:

$$\begin{aligned} {}_AR_B &= X_A \cdot 0{,}58 - Y_A - 0{,}75 \cdot {}_AD_m \\ &= 1200 \cdot 0{,}58 - 2080 + 0{,}75 \cdot 2007 \\ &= 696 - 2080 + 1500, \end{aligned}$$

also ist:

$${}_AR_B = +\ 121 \text{ kg}.$$

Weiter ergibt sich:

$$\begin{aligned} {}_BR_C &= X_B \cdot 0{,}58 - Y_B - 0{,}75 \cdot {}_BD_n \\ &= -\ 696 - 2080 + 2670 \cdot 0{,}75, \\ {}_BR_C &= -\ 785 \text{ kg}, \\ {}_CR_D &= X_C \cdot 0{,}58 - Y_C - 0{,}75 \cdot {}_CD_o \\ &= -\ 464 - 0 + 232, \\ {}_CR_D &= -\ 232 \text{ kg}, \\ {}_DR_E &= 0 \cdot 0{,}58 - 0 - 0{,}75 \cdot 0 \\ &= 0, \\ {}_ER_K &= X_E \cdot 0{,}58 - Y_E - 0{,}75 \cdot {}_ED_q \\ &= 0 - 0 - 232, \\ {}_ER_K &= -\ 232 \text{ kg}, \\ {}_KR_A &= X_K \cdot 0{,}58 - Y_K - 0{,}75 \cdot {}_KD_r \\ &= 464 - 0 - 1249, \\ {}_KR_A &= -\ 785 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die symmetrische Belastung werden symmetrisch gelegene Stäbe gleiche Spannungen erhalten müssen, also:

$$\begin{aligned} {}_BR_C &= {}_KR_A, \\ {}_CR_D &= {}_ER_K, \end{aligned}$$

eine Forderung, die bei den erhaltenen Zahlen erfüllt ist.

Die Spannungen in den Gratstäben

$$Aa,\ Bb \cdots$$

sind durch die Gleichung (95) gegeben:

$$ {}_AG_a = -\left\{ {}_A^{\prime}D_m + {}_A^{\prime}D_r + Z_A \cdot \frac{\sqrt{h^2 \cdot \cos^2\frac{\zeta}{2} + f^2}}{h \cdot \cos\frac{\zeta}{2}} \right\}. $$

Für vorliegende, nur wagrechte Belastung verschwinden die Glieder mit Z_A. Ferner ist:

$$ {}_A^{\prime}D_m = {}_AD_m \cdot \frac{\sin\nu}{\sin(\delta+\nu)} = {}_AD_m \cdot \frac{\sqrt{f^2 + h^2 + \left(\frac{s-t}{2}\right)^2}}{\sqrt{f^2 + h^2 + \frac{t^2}{4}}} $$
$$ = 0{,}91 \cdot {}_AD_m, $$

und Entsprechendes gilt für die Komponenten $'D$ aller anderen Diagonalen, so daß für die Spannungen der Gratstäbe die einfache Gleichung entsteht:

$$ {}_AG_a = -0{,}91 \cdot \{ {}_AD_m + {}_AD_r \}. $$

Man erhält demgemäß:

$$ {}_AG_a = -0{,}91 \cdot \{ {}_AD_m + {}_AD_r \} = -0{,}91 \cdot \{ -2007 - 2670 \} $$
$$ = +4256 \text{ kg}, $$
$$ {}_BG_b = -0{,}91 \cdot \{ {}_BD_m + {}_BD_n \} = -0{,}91 \cdot \{ -2007 - 2670 \} $$
$$ = +4256 \text{ kg}, $$
$$ {}_CG_c = -0{,}91 \cdot \{ {}_CD_n + {}_CD_o \} = -0{,}91 \cdot \{ 1666 - 310 \} $$
$$ = -1234 \text{ kg}, $$
$$ {}_DG_d = -0{,}91 \cdot \{ {}_DD_o + {}_DD_p \} = -0{,}91 \cdot \{ 310 + 0 \} $$
$$ = -282 \text{ kg}, $$
$$ {}_EG_e = -0{,}91 \cdot \{ {}_ED_p + {}_ED_q \} = -0{,}91 \cdot \{ 0 + 310 \} $$
$$ = -282 \text{ kg}, $$
$$ {}_KG_k = -0{,}91 \cdot \{ {}_KD_q + {}_KD_r \} = -0{,}91 \cdot \{ -310 + 1666 \} $$
$$ = -1234 \text{ kg}. $$

Von den eigentlichen Kuppelstäben fehlen nun noch die Unterringstäbe; für dieselben gilt Gleichung (97) bezw. (98):

$$ {}_aR_m = -\{ {}_AG_a \cdot \cos\chi + Y_a \} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin\frac{\zeta}{2}} + X_a \cdot \frac{1}{2 \cdot \cos\frac{\zeta}{2}}. $$

Werden nun für $\sin\frac{\zeta}{2}$, $\cos\frac{\zeta}{2}$ und $\cos\chi$ ihre Zahlenwerte eingesetzt, so ergibt sich die Formel:

$$_aR_m = -\{_AG_a \cdot 0{,}57 + Y_a\} \cdot 1 + X_a \cdot 0{,}58,$$

und man findet folgende Spannungswerte:

$$_aR_m = -\{4256 \cdot 0{,}57 + 1212\} + 700 \cdot 0{,}58 = -3638 + 406$$
$$= -3232 \text{ kg},$$
$$_bR_n = -\{_BG_b \cdot 0{,}57 + Y_b\} + X_b \cdot 0{,}58$$
$$= -\{+4256 \cdot 0{,}57 + 1212\} - 700 \cdot 0{,}58 = -4044 \text{ kg},$$
$$_cR_o = -\{_CG_c \cdot 0{,}57 + Y_c\} + X_c \cdot 0{,}58$$
$$= -\{-1234 \cdot 0{,}57 + 0\} - 450 \cdot 0{,}58 = +477 \text{ kg},$$
$$_dR_p = -\{_DG_d \cdot 0{,}57 + Y_d\} + X_d \cdot 0{,}58$$
$$= -\{-282 \cdot 0{,}57 + 0\} + 0 = +161 \text{ kg},$$
$$_eR_q = -\{_EG_e \cdot 0{,}57 + Y_e\} + X_e \cdot 0{,}58$$
$$= -\{-282 \cdot 0{,}57 + 0\} + 0 = +161 \text{ kg},$$
$$_kR_r = -\{_KG_k \cdot 0{,}57 + Y_k\} + X_k \cdot 0{,}58$$
$$= -\{-1234 \cdot 0{,}57 + 0\} + 450 \cdot 0{,}58 = +999 \text{ kg}.$$

Die jeweiligen rechten Unterringteile erhalten die Spannungen:

$$_rR_a = -\{_AG_a \cdot 0{,}57 + Y_a\} - X_a \cdot 0{,}58$$
$$= -\{+4256 \cdot 0{,}57 + 1212\} - 700 \cdot 0{,}58 = -4044 \text{ kg},$$
$$_mR_b = -\{_BG_b \cdot 0{,}57 + Y_b\} - X_b \cdot 0{,}58$$
$$= -\{+4256 \cdot 0{,}57 + 1212\} + 700 \cdot 0{,}58 = -3232 \text{ kg},$$
$$_nR_c = -\{_CG_c \cdot 0{,}57 + Y_c\} - X_c \cdot 0{,}58$$
$$= -\{-1234 \cdot 0{,}57 + 0\} + 450 \cdot 0{,}58 = +999 \text{ kg},$$
$$_oR_d = -\{_DG_d \cdot 0{,}57 + Y_d\} - X_d \cdot 0{,}58$$
$$= -\{-282 \cdot 0{,}57 + 0\} - 0 = +161 \text{ kg},$$
$$_pR_e = -\{_EG_e \cdot 0{,}57 + Y_e\} - X_e \cdot 0{,}58$$
$$= -\{-282 \cdot 0{,}57 + 0\} - 0 = +161 \text{ kg},$$
$$_qR_k = -\{_KG_k \cdot 0{,}57 + Y_k\} - X_k \cdot 0{,}58$$
$$= -\{-1234 \cdot 0{,}57 + 0\} - 450 \cdot 0{,}58 = +477 \text{ kg}.$$

Symmetrisch gelegene Stäbe haben wieder gleiche Spannungen.

140. Die Auflagerreaktionen in den Kugellagern bestimmen sich mittels der Gleichung:

$$V_a = - {}_AG_a \cdot \sin\chi + Z_a,$$

die sich jetzt wesentlich vereinfacht, indem keine lotrechten Kräfte Z vorhanden sind. Setzt man für $\sin\chi$ seinen Zahlenwert ein:

$$\sin\chi = 0{,}822$$

so ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned}
V_a &= - {}_AG_a \cdot 0{,}822 = - 4256 \cdot 0{,}822 \\
&= - 3498 \text{ kg}, \\
V_b &= - {}_BG_b \cdot 0{,}822 = - 4256 \cdot 0{,}822 \\
&= - 3498 \text{ kg}, \\
V_c &= - {}_CG_c \cdot 0{,}822 = + 1234 \cdot 0{,}822 \\
&= + 1014 \text{ kg}, \\
V_d &= - {}_DG_d \cdot 0{,}822 = + 282 \cdot 0{,}822 \\
&= + 232 \text{ kg}, \\
V_e &= - {}_EG_e \cdot 0{,}822 = + 282 \cdot 0{,}822 \\
&= + 232 \text{ kg}, \\
V_k &= - {}_KG_k \cdot 0{,}822 = + 1234 \cdot 0{,}822 \\
&= + 1014 \text{ kg}.
\end{aligned}$$

Für die lotrechten Reaktionen in den Gleitlagern gelten die Formeln (100):

$$V_m = Z_m - ({}_AD_m + {}_BD_m) \cdot \sin\nu \cdot \sin\alpha.$$

Da nun:

$$\sin\nu \cdot \sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{f^2 + h^2 + \frac{t^2}{4}}} = \frac{5}{6{,}69} = 0{,}747$$

ist und Z_m den Wert Null besitzt, so erhält man den einfachen Ausdruck:

$$\begin{aligned}
V_m &= - 0{,}747 \cdot \{{}_AD_m + {}_BD_m\} \\
&= + 4014 \cdot 0{,}747 = + 2997 \text{ kg}, \\
V_n &= - 0{,}747 \cdot \{{}_BD_n + {}_CD_n\} \\
&= + 1004 \cdot 0{,}747 = + 750 \text{ kg},
\end{aligned}$$

$$V_o = -0{,}747 \cdot \{{}_CD_o + {}_DD_o\} = 0 \text{ kg},$$
$$V_p = -0{,}747 \cdot \{{}_DD_p + {}_ED_p\} = 0 \text{ kg},$$
$$V_q = -0{,}747 \cdot \{{}_ED_q + {}_KD_q\} = 0 \text{ kg},$$
$$V_r = -0{,}747 \cdot \{{}_KD_r + {}_AD_r\}$$
$$= +1004 \cdot 0{,}747 = +\ 750 \text{ kg}.$$

Für die wagrechten Auflagerdrücke, nach rechts als positiv eingeführt, finden sich die Werte (vgl. Gl. 101):

$$T_m = {}_aR_m - {}_bR_m + \{{}_AD_m - {}_BD_m\} \cdot \frac{\frac{t}{2}}{\sqrt{f^2 + h^2 + \frac{t^2}{4}}} + X_m,$$

oder, da:

$$\frac{\frac{t}{2}}{\sqrt{f^2 + h^4 + \frac{t^2}{4}}} = 0{,}49$$

ist:

$$T_m = {}_aR_m - {}_mR_b + \{{}_AD_m - {}_BD_m\} \cdot 0{,}49 + X_m$$
$$= -3232 + 3232 + \quad 0 \quad + 0$$
$$= 0 \text{ kg},$$

$$T_n = {}_bR_n - {}_nR_c + \{{}_BD_n - {}_CD_n\} \cdot 0{,}49 + X_n$$
$$= -4044 - \ 999 + \{-4335\} \cdot 0{,}49 - 780$$
$$= -7947 \text{ kg},$$

$$T_o = {}_cR_o - {}_dR_o + \{{}_CD_o - {}_DD_o\} \cdot 0{,}49 + X_o$$
$$= \quad 477 - \ 161 + \{- \ 619\} \cdot 0{,}49 + 0$$
$$= +13 \text{ kg},$$

$$T_q = {}_eR_q - {}_qR_k + \{{}_ED_q - {}_KD_q\} \cdot 0{,}49 + X_q$$
$$= \quad 161 - \ 477 + \{+ \ 619\} \cdot 0{,}49 + 0$$
$$= -13 \text{ kg},$$

$$T_r = {}_kR_r - {}_rR_a + \{{}_KD_r - {}_AD_r\} \cdot 0{,}49 + X_r$$
$$= \quad 999 + 4044 + \{+4335\} \cdot 0{,}49 + 780$$
$$= +7947 \text{ kg}.$$

Als Proben für die Berechnungen können die Bedingungen dienen, daß

1. die Summe aller vertikalen Kräfte verschwinden muß,
2. diejenige aller Horizontalkräfte in zwei zueinander senkrechten Richtungen.

1. Probe:

$$-(V_a + V_b + \cdots + V_k) = V_m + V_n + \cdots V_r$$
$$+ 2 \cdot 3498 - 2 \cdot (232 + 1014) \overset{?}{=} 2997 + 2 \cdot 750.$$

Die entstehenden Abweichungen auf beiden Seiten sind auf die durch die Abkürzungen hervorgerufene Ungenauigkeit zurückzuführen.

2. Probe. In Abb. 179 sind die wagrechten Kräfte T mit ihrer aus der Rechnung gefundenen Richtung eingetragen. Es müßte sich ergeben (die Werte T absolut eingesetzt):

$$1.\ (T_n + T_r) \cdot \sin\zeta - (T_o + T_q) \cdot \sin\zeta = \Sigma H,$$
$$2.\ (T_n + T_o) \cdot \cos\zeta - (T_q + T_r) \cdot \cos\zeta = 0,$$

wobei erstere Gleichung die Komponenten in Richtung der Kräfte H, letztere diejenigen in Richtung senkrecht hierzu in Betracht zieht.

Die erste Gleichung liefert:

$$2 \cdot (7947 - 13) \cdot 0{,}866$$
$$= 2 \cdot \{2400 + 800 + 1400 + 900 + 450\} + 1800,$$
$$13741 \text{ kg} = 13700 \text{ kg},$$

ergibt also für die beiden Seiten eine Abweichung, die ganz unbedeutend ist.

Daß die linke Seite der zweiten Gleichung Null ergibt, ist ohne weiteres klar, da T_o, T_n zu T_q, T_r symmetrisch liegen.

§ 38. Analytische Berechnung der mehrgeschossigen Scheibenkuppel.

141. Es wird sich in diesem Paragraphen nur um Berechnung von Systemen handeln, die nach Abb. 165 und ähnlich gebaut sind. Die Spannungsermittlung s o l c h e r Kuppeln,

die im unteren Geschoß eine Scheibenkuppel aufweisen, auf der etwa eine Schwedler-Kuppel aufsitzt, ist durch die letzten Paragraphen erledigt, indem die Spannungen der Schwedler-Kuppel auf die untere, gewöhnliche Scheibenkuppel als äußere Kräfte wirken.

Was nun das System, Abb. 165, anbelangt, so läßt sich leicht erkennen, daß durch zweckmäßige Erweiterung der oben verwendeten Momentenmethode zunächst die Spannungen der Diagonalen eines Geschosses, dann die der Grat- und Oberringstäbe desselben ermittelt werden können.[1]) Es soll der Gang an Handen des Gebildes Abb. 180 angegeben werden, wobei ganz beliebige Lasten vorausgesetzt werden.

Man berechnet zunächst nach den §§ 35 und 36 die Spannungen in den Diagonalenpaaren des obersten Geschosses, dann die Spannungen der Gratstäbe

$$Aa_2, \quad Bb_2 \cdots Dd_2,$$

sowie der Oberringstäbe

$$AB, \quad BC, \quad CD, \quad DA.$$

Hierauf geht man zum zweiten Geschoß über und bestimmt die Spannungen in den vier Diagonalen jedes Feldes, z. B.

$$a_2 m_1, \quad m_1 m, \quad m m_2, \quad m_2 b_2,$$

mittels vier Gleichungen, die die Momentenmethode liefert. Man schneide zu diesem Zweck zunächst einen Teil um Knotenpunkt m heraus und stelle die Summe der Momente für eine Linie in der Ebene AmB, z. B. AB, auf. Die Momentengleichung enthält nur die Spannungen von mm_1 und mm_2, sowie die in m wirkende äußere Kraft. Weiter lege man einen Flächenschnitt um m_1, dann einen solchen um m_2 und wähle als Momentenachse eine Linie in der Ebene $a_1 b_1 b a$, z. B. ab. In der ersten der so entstehenden Gleichungen treten auf die in m_1 angreifende äußere Kraft, sowie die Spannungen in $m_1 a_2$, $m_1 m$; in der zweiten die in m_2 wirkende Last, sowie die Kräfte in $m_2 m$ und $m_2 b_2$. Man hat damit drei Gleichungen für die vier Un-

[1]) Schlink, Vhdlgn. d. V. f. Gewerbefleiß, S. 181.

bekannten gefunden, es fehlt noch eine vierte; dieselbe liefert der um $(a_2 m b_2)$ gelegte Flächenschnitt s_1. Als Momentenachse wird hierbei eingeführt die Schnittlinie der zu beiden Seiten an die Fläche $(a_2 b_2 b_1 a_1)$ anstoßenden Ebenen $(a_1 a_2 d_2 d_1)$ und $(b_2 c_2 c_1 b_1)$. Von den am losgelösten Teil wirkenden Kräften liefern zum Momente einen Beitrag: die in a_2, m, b_2 angreifende Last, sowie die Spannungen in $a_2 A$, $b_2 B$, $m A$ und $m B$.

Entsprechend kann man für jedes Feld des zweiten Geschosses vier Gleichungen aufstellen und sämtliche Diagonalspannungen ermitteln. Nachdem diese bekannt sind, liefern die

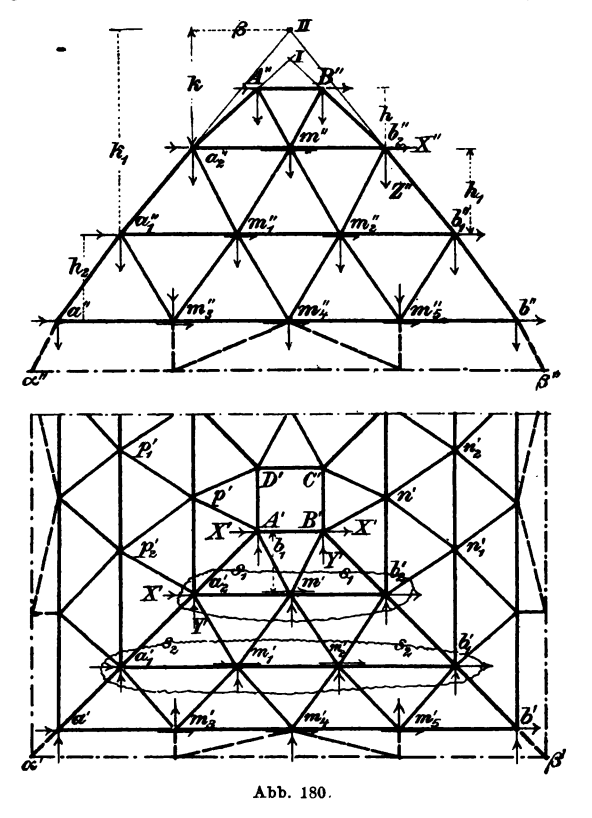


Abb. 180.

Knotenpunkte a_2, b_2, c_2, d_2 die Möglichkeit weiterer Kräftezerlegung: an Knotenpunkt a_2 findet man die Spannung in

$a_2 a_1$, $a_2 p$, $a_2 m$, an Punkt b_2 die Kräfte in $b_2 b_1$, $b_2 m$, $b_2 n$ usw. Sind dadurch die Spannungen im Ringe $a_2 b_2 c_2 d_2$ und den Gratstäben ermittelt, so können die Knotenpunkte m, n, o, p zur Prüfung der Berechnung dienen, indem an jedem die wirkenden Kräfte sich Gleichgewicht halten müssen.

142. Man gehe nun über zu dem nächsten Geschoß und bestimme wiederum zuerst die Spannungen der Diagonalen aller Felder, z. B. diejenigen des Feldes $a a_1 b_1 b$. Die Flächenschnitte um m_1 bezw. m_2 liefern bezüglich der Achse $a_2 b_2$ zwei Momentengleichungen, in denen als Unbekannte nur die Spannungen in $m_1 m_3$, $m_1 m_4$ bezw. $m_2 m_4$, $m_2 m_5$ vorkommen; außer diesen Kräften treten allerdings noch die in m_1 bezw. m_2 angreifenden Lasten auf. Die Flächenschnitte um m_3, m_4, m_5 liefern für die Achse $\alpha\beta$ drei Momentengleichungen, die nacheinander die Unbekannten $m_3 a_1$, $m_3 m_1$, bezw. $m_4 m_1$, $m_4 m_2$ und $m_5 m_2$, $m_5 b_1$ enthalten, und die ebenso wie die ersten Gleichungen einfach zu bilden sind. Zur Gewinnung der notwendigen sechsten Gleichung ist schließlich der Flächenschnitt s_2 um die Punkte $(a_1 m_1 m_2 b_1)$ zu legen, der bezüglich der Schnittlinie der Ebenen $a_1 d_1 d a$ und $b_1 c_1 c b$ einen Momentenansatz liefert, der alle sechs Unbekannten enthält. In dieser Gleichung treten außer den gesuchten Diagonalspannungen noch auf die in a_1, m_1, m_2, b_1 angreifenden Lasten, sowie die bereits bekannten Spannungen in

$$a_1 a_2, \quad m_1 a_2, \quad m_1 m, \quad m_2 m, \quad m_2 b_2, \quad b_1 b_2.$$

Die Aufstellung dieser sechs Gleichungen kann ohne große Arbeit geschehen und die Auflösung derselben bereitet keine Schwierigkeit, da in den fünf ersten Gleichungen nur je zwei Unbekannte auftreten.

Nach Ermittlung aller Diagonalspannungen des dritten Geschosses findet man mit Hilfe der Knotenpunkte a_1, b_1, c_1, d_1 die Spannungen in den Gratstäben $a_1 a$, $b_1 b \cdots$ und in den an diesen Punkten einmündenden Gurtstäben, dann an den Zwischenpunkten m_1, $m_2 \cdots$ die Spannungen der übrigen Ringstäbe der Ebene $a_1 b_1 c_1 d_1$. Diese Zwischenpunkte liefern wiederum einige Proben für die Richtigkeit der Rechnung.

143. Die Ermittlung der Spannungen im Stützengeschoß bietet alsdann keine Schwierigkeit mehr, indem man zunächst an den Knotenpunkten a, b, c, d die Kräfte der daselbst zusammentreffenden Stäbe bestimmt, hierauf an m_3 und m_5 (bezw. $n_3, n_5 \cdots$) die Spannung eines Gurtstabes und des senkrechten Stützungsstabes, und schließlich an m_4 (bezw. $n_4 \cdots$) die Spannung in den beiden Stützungsstäben, oder also die wagrechte und senkrechte Auflagerkraft des Gleitlagers berechnet. Die Größe der vertikalen Auflagerkräfte an allen Kugellagern kann man übrigens auch von vornherein angeben, ohne erst Spannungen ermittelt zu haben, indem man jedesmal die in diesen Punkten wirkende Last (z. B. in m_3) zerlegt in die Richtung des vertikalen Stützungsstabes und die benachbarte Ebene des Untergeschosses der Kuppel, welche ja alle übrigen Kräfte am Knotenpunkt enthält.

144. Die Hauptaufgabe bietet jedesmal die Bestimmung der Diagonalspannungen. Um die Gleichungen recht einfach zu erhalten, ist es notwendig, die Momente der auftretenden Kräfte möglichst übersichtlich anzuschreiben. Es möge darum in folgenden Zeilen gerade auf diese Gleichungen näher eingegangen werden, um sich eine Anschauung von ihrer Bauweise zu verschaffen. Kräfte sollen in allen Punkten angreifen; jede derselben wird in drei Komponenten zerlegt, von denen Z vertikal nach abwärts verläuft, die horizontale Kraft X in Richtung des Rings (nach rechts positiv) fällt, und die horizontale Komponente Y senkrecht zu dieser gerichtet ist. Die Berechnung der Stabkräfte im Obergeschoß ist durch die Formeln in §§ 35 und 36 erledigt.

Man gelangt weiter zu Knotenpunkt m. Die Spannungen in Am und Bm (D_1, D_2) haben für die Achse AB kein Moment, ebensowenig die Kräfte in $a_2 m$ und $m b_2$. Bezeichnet man die Höhe des obersten Geschosses mit h, die Horizontalentfernung der Ringe AB und $a_2 b_2$ mit b_1, so liefert die äußere Kraft das Moment

$$- Y_m \cdot h - Z_m \cdot b_1 .$$

Jede Diagonalspannung D_4 in mm_1 und D_5 in mm_2 (alle Stabkräfte als Zug eingeführt), zerlege man in eine Komponente in Richtung a_2b_2:

$${}_oD_4 \quad \text{bezw.} \quad {}_oD_5,$$

die keinen Beitrag zum Moment liefert, und eine senkrecht hierzu in der Ebene $a_2b_2b_1a_1$:

$${}_kD_4, \quad {}_kD_5.$$

Letzterer Teil wird abermals in zwei Komponenten zerlegt, von denen die eine wagrecht, die andere senkrecht verläuft; erstere fällt also mit $(-Y_m)$ zusammen, letztere mit Z_m. Wird der Neigungswinkel zwischen der Ebene $a_1b_1b_2a_2$ und der horizontalen mit α_2 bezeichnet, so ergibt sich die Momentengleichung:

$$({}_kD_4 + {}_kD_5) \cdot \cos\alpha_2 \cdot h - ({}_kD_4 + {}_kD_5) \cdot \sin\alpha_2 \cdot b_1$$
$$- Y_m \cdot h - Z_m \cdot b_1 = 0.$$

Da die Komponenten zu der Kraft in einem gewissen Verhältnis stehen, kann man einführen:

$${}_kD_4 = \lambda \cdot D_4, \quad {}_kD_5 = \mu \cdot D_5,$$

wobei λ und μ durch die Stabanordnung bekannt sind — etwa aus einem Kräftepolygon mit beliebigem D_4 und Kräften in Richtung ${}_oD_4$ und ${}_kD_4$ (vgl. das Beispiel des folgenden Paragraphen) —, und erhält:

$$(\lambda \cdot D_4 + \mu \cdot D_5) \cdot (h \cdot \cos\alpha_2 - b_1 \cdot \sin\alpha_2) = Y_m \cdot h + Z_m \cdot b_1.$$

Weiter hat man Knotenpunkt m_1 ins Auge zu fassen. Die Kräfte D_3, D_4 (in a_2m_1, mm_1) sind wieder in der Ebene $a_2b_2b_1a_1$ zu zerlegen in zwei Komponenten in Richtung des Rings:

$${}_uD_3, \quad {}_uD_4,\text{[1]}$$

und senkrecht dazu:

$${}_fD_3, \quad {}_fD_4.$$

Letztere Teilkräfte, die die Werte:

$$\nu \cdot D_3 \quad \text{bezw.} \quad \lambda \cdot D_4$$

[1]) Die Indices u bezw. o werden gewählt für die Komponenten in Richtung des Rings am unteren bezw. oberen Punkt eines Geschosses.

besitzen mögen, werden nochmals in zwei Komponenten gespalten, die wagrecht und senkrecht verlaufen, also in Richtung Y und $-Z$ fallen. Schließt sich unter diesem Geschoß gleich ein senkrechtes Geschoß an, so liefert Z kein Moment und man hat:

$$(\lambda \cdot D_4 + \nu \cdot D_3) \cdot \cos\alpha_2 \cdot h_2 + Y_{m_1} \cdot h_2 = 0,$$

wenn h_2 die Höhe des dritten Geschosses bedeutet, die wieder herausfällt:

$$\lambda \cdot D_4 + \nu \cdot D_3 = -\frac{Y_{m_1}}{\cos\alpha_2}.$$

Entsprechend liefert Knotenpunkt m_2:

$$\mu \cdot D_5 + \varkappa \cdot D_6 = -\frac{Y_{m_2}}{\cos\alpha_2}.$$

Es fehlt noch die Gleichgewichtsbedingung, die der Flächenschnitt $s_1 s_1$ für die Schnittlinie der beiden Ebenen

$$(d_1 a_1 a_2 d_2) \quad \text{und} \quad (b_1 b_2 c_2 c_1)$$

als Momentenachse ergibt. Diese Linie läuft parallel der Richtung bc und ad in einer Höhe k (die sofort zu ermitteln ist) über dem Ring $a_2 b_2 c_2 d_2$. Getroffen werden vom Schnitt die bei a_2, b_2 zusammenlaufenden Stäbe, mit Ausnahme von $a_2 m$ und $b_2 m$, die vier Diagonalen bei m, und außer diesen Spannungen greifen noch die Lasten in den Punkten a_2, m, b_2 am losgelösten Stück an. Die Kräfte Y ergeben kein Moment, da sie parallel zur Achse verlaufen; ebenso liefert Z_m keinen Beitrag, da es die Achse schneidet. Bezeichnet man die halbe Länge von $a_2 b_2$ mit β, so liefern demgemäß die äußeren Kräfte das Moment:

$$-(X_{a_2} + X_{b_2} + X_m) \cdot k - Z_{a_2} \cdot \beta + Z_{b_2} \cdot \beta.$$

Die Spannungen der bei m einmündenden Diagonalen D_1, D_2, D_4, D_5 werden in zwei Komponenten zerlegt: eine in Richtung des Rings $a_2 b_2$:

$${}_uD_1,\ {}_uD_2 \quad \text{bezw.} \quad {}_oD_4,\ {}_oD_5$$

und eine senkrecht hierzu in der Ebene $a_2 b_2 BA$:

$${}_fD_1,\quad {}_fD_2$$

bezw. in der Ebene $a_1 b_1 b_2 a_2$:

$${}_kD_4, \quad {}_kD_5;$$

letztere Komponenten schneiden die Momentenachse; erstere dagegen wirken am Hebelarm k:

$$({}_uD_1 + {}_oD_4 - {}_uD_2 - {}_oD_5) \cdot k.$$

Um weiter das Moment von D_3 und D_6 aufzustellen, denke man sich jede dieser Spannungen gespalten in eine Komponente in Richtung des Rings $a_2 b_2$:

$${}_rD_3, \quad {}_rD_6$$

und eine solche in Richtung des Grats $a_2 a_1$ bezw. $b_2 b_1$:

$${}_sD_3 \text{ bezw. } {}_sD_6.$$

Letztere liefern keinen Momentenbeitrag, wohl aber die ersteren:

$$(- {}_rD_3 + {}_rD_6) \cdot k.$$

Es fehlen schließlich noch die Momente von ${}_AG_{a_2}$ und ${}_BG_{b_2}$. Man denke sich die Spannung in $A a_2$ zerlegt in drei Komponenten: eine in die senkrechte Richtung:

$${}_AG_{a_2} \cdot \sin \chi_1,$$

eine weitere in Ringrichtung $a_2 b_2$:

$${}_AG_{a_2} \cdot \cos \chi_1 \cdot \cos \varphi$$

und eine dritte mit $a_2 d_2$ zusammenfallend:

$${}_AG_{a_2} \cdot \cos \chi_1 \cdot \sin \varphi;$$

hierbei bedeutet φ den Winkel von der Horizontalprojektion des Grats mit $a_2 b_2$. Entsprechend verfährt man mit ${}_BG_{b_2}$. Die in Richtung $a_2 d_2$ bezw. $b_2 c_2$ fallenden Komponenten ergeben kein Moment, so daß man erhält:

$$({}_AG_{a_2} - {}_BG_{b_2}) \cdot \sin \chi_1 \cdot \beta + ({}_BG_{b_2} - {}_AG_{a_2}) \cdot \cos \chi_1 \cdot \cos \varphi \cdot k.$$

Bedenkt man nun wiederum, daß die verschiedenen Komponenten von D zu D selbst in bestimmtem Verhältnis stehen, das durch die Lage des Stabes und der Komponente gegeben ist, so kann man schreiben:

$$
\begin{aligned}
{}_uD_1 &= \alpha \cdot D_1, & {}_uD_2 &= \beta \cdot D_2, \\
{}_rD_3 &= \nu' \cdot D_3, & {}_rD_6 &= \varkappa' \cdot D_6, \\
{}_sD_3 &= \nu'' \cdot D_3, & {}_sD_6 &= \varkappa'' \cdot D_6, \\
{}_oD_4 &= \lambda' \cdot D_4, & {}_oD_5 &= \mu' \cdot D_5.
\end{aligned}
$$

Man erhält die Momentengleichung:

$$
\begin{aligned}
&({}_uD_1 + {}_oD_4 - {}_uD_2 - {}_oD_5) \cdot k + (-{}_rD_3 + {}_rD_6) \cdot k \\
&+ ({}_AG_{a_2} - {}_BG_{b_2}) \cdot \sin\chi_1 \cdot \beta + ({}_BG_{b_2} - {}_AG_{a_2}) \cdot \cos\chi_1 \cdot \cos\varphi \cdot k \\
&+ (Z_{b_2} - Z_{a_2}) \cdot \beta - (X_{a_2} + X_{b_2} + X_m) \cdot k = 0,
\end{aligned}
$$

oder:

$$
\begin{aligned}
&(+\nu' \cdot D_3 - \lambda' \cdot D_4 + \mu' \cdot D_5 - \varkappa' \cdot D_6) \cdot k \\
&= -(X_{a_2} + X_{b_2} + X_m) \cdot k + (Z_{b_2} - Z_{a_2}) \cdot \beta + (\alpha \cdot D_1 - \beta \cdot D_2) \cdot k \\
&+ ({}_AG_{a_2} - {}_BG_{b_2}) \cdot (\sin\chi_1 \cdot \beta - \cos\chi_1 \cdot \cos\varphi \cdot k).
\end{aligned}
$$

Damit sind denn die vier notwendigen Gleichungen zur Bestimmung der Diagonalspannungen erhalten. Die letzte derselben sieht ja allerdings nicht einfach aus. Bedenkt man aber, daß in einem praktischen Beispiel alle Werte der rechten Seite Zahlenwerte sind, so gewinnt sie schon eine wesentlich einfachere Gestalt. In einem praktischen Fall wird man vor allem die verschiedenen Koeffizienten der Diagonalspannungen ermitteln. Am einfachsten läßt sich dies graphisch ausführen: man zeichne sich die betreffende Feldebene im wirklichen Maßverhältnis („wahrer Größe“) auf, nehme für die verschiedenen Spannungen D_3, D_4, D_5, D_6 willkürliche Längen an und zerlege diesen Wert in die gewünschten Komponenten. Die so gewonnenen Längen (z. B. ${}_oD_4$, ${}_kD_4$ in Abb. 187 in § 40) geben in die angenommene Länge dividiert die Koeffizienten λ' und λ:

$$
\lambda' = \frac{{}_oD_4}{D_4}, \qquad \lambda = \frac{{}_kD_4}{D_4}.
$$

In dieser Weise sind die Komponenten sehr schnell durch die Spannungen auszudrücken. Im nächstfolgenden Paragraphen soll ein Zahlenbeispiel vollständig durchgeführt werden. Bevor darauf eingegangen wird, möge zunächst eine rein zeichnerische Methode erwähnt werden, die in erster Linie für

Einzellasten in Betracht kommt. Sie folgt aus dem von Föppl zur Berechnung seiner Leipziger Kuppel verwendeten Verfahren.

§ 39. Graphische Berechnung der mehrgeschossigen Scheibenkuppel.

145. Es wirke in einem beliebigen Eckpunkt, z. B. a_1, eine Last von willkürlicher Größe und Richtung (Abb. 181). Die Stäbe des oberen Geschosses sind nach den früheren Ausführungen für die einfache Scheibenkuppel spannungslos. Man gelangt zum zweiten Geschoß. Da auf die rechte und hintere Feldebene keine Kräfte wirken, sind nach S. 263 alle Diagonalstäbe dieser Felder, die Ringstäbe $b_1 n$, $n c_1$, $c_1 o$, $o d_1$ und Gratstab $c_1 c$ frei von Spannung.

Anders liegen die Verhältnisse für das vordere und linke Feld, da in a_1 eine Last angreift. Man denke sich das ebene System $a_1 b_1 m_2 m_1$ mittels eines Flächenschnittes losgelöst. Die Resultante der bei b_1 getroffenen Stäbe liegt in der Linie $b_1 b$, diejenige bei m_1 und m_2 in Richtung $m_1 m_2$. Bei m tritt keine Resultante auf, da in Am und Bm keine Spannungen vorhanden sind. Die Resultante von P_{a_1} und den bei a_1 geschnittenen Stäben muß mit den Spannungen in $a_1 m$ und $a_1 m_1$ Gleichgewicht halten, andrerseits aber auch mit den Resultanten bei b_1, m_1, m_2; diese drei letzteren Kräfte treffen sich

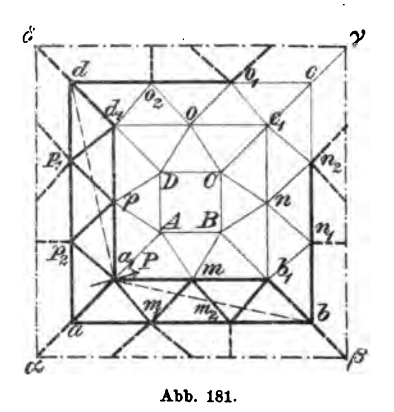


Abb. 181.

im Punkte b, also fällt die Resultante von $a_1 m$ und $a_1 m_1$ in die Linie $a_1 b$. Ebenso findet sich aus Betrachtung der linken Feldebene, daß die Resultante von $a_1 p$ und $a_1 p_2$ in der Richtung $a_1 d$ verläuft.

Am Knotenpunkt a_1 muß demgemäß Gleichgewicht herrschen zwischen P_{a_1} und drei Kräften in der Richtung $a_1 d$, $a_1 b$

und $a_1 a$. Letztere Kraft gibt sofort die Spannung im Gratstab $a_1 a$ an; erstere ist in die Richtungen $a_1 p$ und $a_1 p_2$ zu zerlegen, die zweite Kraft in $a_1 m$ und $a_1 m_1$, wodurch die Spannungen in diesen vier Stäben erhalten werden. Da nun weiter die Resultante von $a_1 m$ und $a_1 m_1$ im Gleichgewicht stehen soll mit derjenigen, die sich aus Zusammensetzung der Einzelresultanten der bei m_1, m_2 und b_1 getroffenen Spannungen ergibt, erstere beiden jedoch in dieselbe Linie fallen, so ist R_{b_1} bestimmt. Es haben aber $b_1 n_1$ und $b_1 n$ keine Spannung, so daß von den bei b_1 getroffenen Stäben nur $b_1 b$ nicht spannungslos ist, und es stellt infolgedessen R_{b_1} sofort die Spannung in $b_1 b$ dar. Ebenso erhält man am linken Feld durch Zerlegung der Resultanten von $a_1 p$, $a_1 p_2$ in die Richtungen dp_1 und dd_1 direkt die Kraft R_{d_1} und damit die Spannung in dd_1.

Nun kann man leicht die übrigen Spannungen im vorderen und linken Felde bestimmen. Man findet — wie erwähnt — an Knotenpunkt a_1 die Kräfte in $a_1 m$ und $a_1 m_1$, dann an b_1 diejenige in $b_1 m$ und $b_1 m_2$, an m diejenige in mm_1 und mm_2, und entsprechend im linken Feld die Spannungen in den Diagonalstäben und den oberen Gurtstäben $d_1 p$ und pa_1. Die unteren Knotenpunkte der Felder liefern hierauf die Spannungen in den stark gezogenen Stäben.[1]) Die spannungslosen Stäbe sind wieder durch dünne Striche angegeben.

Wirkten gleichzeitig in anderen Gratpunkten b_1, c_1, d_1 Kräfte, so müßte man je für eine Einzellast die Spannungen in der angegebenen Weise ermitteln und diese dann zusammenfügen.

146. Greift in einem oberen Gratpunkt, z. B. A, eine Kraft an, so ändern sich die Verhältnisse insofern, als auf den zweiten Ring nicht nur in a_1 (Spannung in Aa_1), sondern auch in d_1, b_1 und p und m Kräfte wirken. Die Wirkungen der Kräfte in d_1 und b_1 sind durch das eben besprochene Spannungsbild erledigt, wohl aber tritt durch die Spannung in Ap, pD

---

[1]) Die von m_2, n_1, p_2, o_2 auslaufenden Stützungsstäbe, die irrtümlich stark gestrichelt sind, erhalten keine Spannung.

bezw. Am, mB ein neuer Umstand ein. Es möge das Spannungsbild, das durch die Kräfte Am, Bm allein entsteht, näher betrachtet werden.

Die Spannungen in Am und mB liefern eine Resultante R_m (Abb. 182) in der Linie $a_1 b_1$, weil sie mit derjenigen von

$$a_1 m, \quad m_1 m, \quad m_2 m, \quad b_1 m,$$

die alle in der Ebene $a_1 b_1 b a$ liegen, Gleichgewicht halten muß. Auf das losgelöste ebene Feld $(a_1 m b_1 m_2 m_1)$ wirken demnach: R_m, dann die Resultante R_{a_1} der bei a_1 getroffenen Stäbe in der Linie $a_1 a$, ferner R_{b_1} in Richtung $b_1 b$ und schließlich R_{m_1} und R_{m_2} in der Linie $a m_1 m_2 b$. Wenn diese fünf Resultanten Gleichgewicht halten sollen, muß diejenige von R_{a_1}, R_m sich aufheben gegen R_{b_1}, R_{m_1}, R_{m_2}; da sich nun die beiden ersteren in a_1 schneiden, die drei letzteren in b_1, so fällt die Resultante R_r von R_{a_1}, R_m und ebenso diejenige von R_{b_1}, R_{m_1}, R_{m_2} in die Verbindungslinie $a_1 b$.

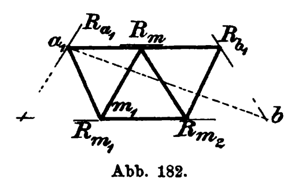


Abb. 182.

Da nun R_r (Linie $a_1 b$) die Resultante von R_m und R_{a_1} darstellt und R_m bekannt ist, kann man mittels eines Kräftepolygons R_{a_1} und R_r finden, und dann an Punkt b die Größe von R_{b_1}. Da weiter die Spannungen in $a_1 m$, $a_1 m_1$ mit R_{a_1} Gleichgewicht halten, R_{b_1} mit $b_1 m$ und $b_1 m_2$, so können diese vier Spannungen ermittelt werden und dann an m die Stabkräfte in $m m_1$ und $m m_2$.

Ebenso findet man im linken Felde die verschiedenen Spannungen.

147. Schließlich möge noch der Fall betrachtet werden, daß im Punkte m eine beliebig gerichtete Kraft wirkt. Dann erhalten im Obergeschoß nur die Stäbe Aa_1, AB, Bb_1, Am und Bm Spannungen; man ermittelt sie, indem man an m die Kraft P_m zerlegt in die Richtung mS und die benachbarte Ebene $a_1 b_1 b a$ (vgl. Nr. 135). In letzterer erhält man auf diese Weise eine bestimmte Kraft R_m in bestimmter Richtung, die

den Anteil von P_m darstellt, der in diese Ebene fällt, oder also die Resultante von ma_1, mm_1, mm_2 und mb_1.

Die Kräfte in Aa_1, Bb_1 wirken in der oben angegebenen Weise auf das untere System als Kräfte in den Punkten a_1 und b_1. Von ihrem Einfluß — der durch Nr. 145 klargelegt ist — möge hier abgesehen und nur betont werden, daß sie für sich die in Abb. 183 stark gezogenen Stäbe in Spannung versetzen;[1]) dagegen ist die Wirkung von P_m, Am und Bm weiter zu betrachten.

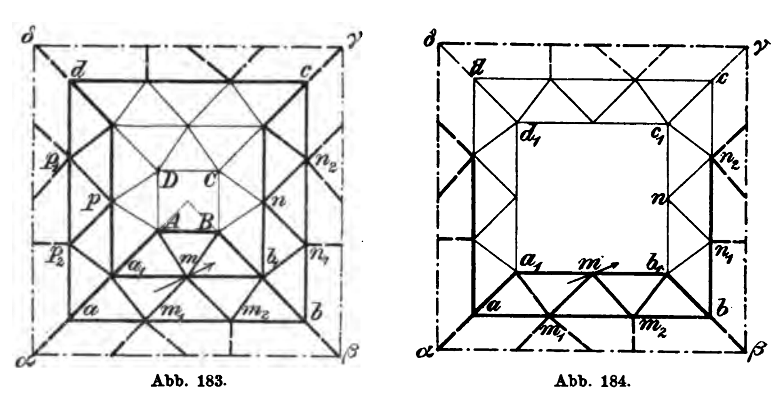


Abb. 183. Abb. 184.

Man weiß zunächst, daß nur in den Diagonalen derjenigen Feldebenen Spannungen auftreten, an denen Lasten angreifen; es sind hiernach die Stäbe des linken, hinteren und rechten Feldes (Abb. 184) spannungslos. Nun denke man sich wiederum das ebene Feld $(a_1 m b_1 m_2 m_1)$ durch einen Flächenschnitt losgelöst. Auf dasselbe wirken P_m, Am und mB im Punkte m ein; ihre Resultante ist aber durch die oben bereits erwähnte Kraft R_m gegeben, deren Richtung und Größe bekannt ist. Es greifen demgemäß an dem ebenen Feld an: R_{a_1} (die Resultante aller bei a_1 vom Flächenschnitt getroffenen Spannungen) in der Linie $a_1 a$, R_{b_1} (in Linie $b_1 b$), R_m und R_{m_1}, R_{m_2} in Richtung $am_1 m_2 b$. Da R_m der Größe und Richtung nach bekannt

[1]) Die von m_2, n_1, p_2, o_2 auslaufenden Stützungsstäbe sind spannungslos.

ist, und R_{m_1} und R_{m_2} in dieselbe Linie fallen, also auf R_{b_1} denselben Schnittpunkt b ergeben, kann man das ebene Feld betrachten, als ob es durch drei Fesseln in den Linien $a_1 a$, $b_1 b$, $m_1 m_2$ gehalten wäre, kann genau, wie oben ausgeführt, mittels der Hilfslinie R_r (Abb. 185) Gleichgewicht herstellen zwischen

Abb. 185.

$$R_m, R_{a_1} \text{ und } R_{b_1}, R_{m_1} + R_{m_2},$$

und findet hierdurch R_{a_1}, R_{b_1} und dann mittels der Knotenpunkte a_1, b_1, m die Stabkräfte:

$$a_1 m_1,\ a_1 m;\ b_1 m_2,\ b_1 m;\ m m_1,\ m m_2.$$

Die unteren Knotenpunkte liefern hierauf die Spannungen der Stützungsstäbe in der Reihenfolge:

$$a,\ b,\ m_2,\ m_1,\ n_1,\ n_2,\ p_2,\ p_1.$$

Alle Stäbe, die infolge R_m Spannungen erhalten, sind in Abb. 184 stark ausgezogen.[1]) Faßt man nun wirklich eine Belastung durch P_m ins Auge, so sind die beiden Spannungszustände der Abbildungen 183 und 184 übereinander zu lagern.

148. Man erkennt, daß sich bei allgemeiner Belastung das Spannungsbild im wesentlichen aus zwei verschiedenen Zuständen zusammensetzt: aus demjenigen, bei dem nur Kräfte an den Eckpunkten wirken, und demjenigen, bei dem an Zwischenpunkten Lasten angreifen. Beide greifen im allgemeinen ineinander über, indem durch die Belastung an den Hauptknoten auch in den von den Zwischenpunkten auslaufenden Stäben Spannungen auftreten, die für den unteren Teil als äußere Kräfte einzuführen sind, und umgekehrt: Die Kräfte an den Hauptpunkten hatte man ja zunächst ähnlich zu zerlegen, wie dies bei der Schwedler-Kuppel geschah, indem die Hilfslinie R_r in die Felddiagonale fiel, und es wurden hierbei auch die Zwischenstäbe in Spannung versetzt. Die Lasten an den Zwischenpunkten rufen zunächst in den Stäben des ebenen

[1]) Die einzelnen Stützungsstäbe, die von m_2, $n_1 \cdots$ ausgehen, sind spannungslos.

Feldes Spannungen hervor, die aber Kräfte auf das Hauptsystem überleiten. Diese Spannungen der Füllungsstäbe findet man als Stabkräfte eines ebenen Systems, nachdem man, wie in Nr. 147 erwähnt, die wirkenden Lasten zweckentsprechend zerlegt hat.

Auf Grund dieser Betrachtung erkennt man die Berechtigung der von Föppl für die Berechnung derartiger Kuppeln mit Netzwerkfüllung aufgestellten Regel:[1])

Man betrachte die Kuppel geradezu zusammengesetzt aus zwei Systemen: einem Hauptsystem, das die Form der Schwedler-Kuppel aufweist, und den ebenen Feldsystemen, die zwischen den Ring- und Gratstäben der Schwedler-Kuppel eingeschaltet sind, und trenne dementsprechend auch die Belastung in zwei Teile: eine solche, die auf die Gratpunkte (Hauptpunkte) wirkt, und eine solche, die in den Ringzwischenpunkten (Nebenpunkten) angreift. Für die Belastung der Nebenknotenpunkte faßt man jedes Feld als ebenen Träger auf und zerlegt demgemäß die an diesen Punkten angreifende äußere Kraft in zwei bezw. drei Komponenten in die am Ring zusammenstoßenden Ebenen (falls Kraft senkrecht zum Ring wirkt) bezw. in den Ring und die benachbarten Ebenen. Diese ebenen Träger pflanzen die Spannung fort und fügen zu den Lasten der Hauptpunkte eine ergänzende Kraft hinzu. Die Kraft der Hauptpunkte ist in Grat- und Diagonalenrichtung (R_r) und weiter in die Füllungsstäbe zu zerlegen.

Auf diese Weise lassen sich die Spannungen auf rein graphischem Wege ermitteln und zwar in verhältnismäßig leichter Weise. Wenn man sich die Arbeit näher vorstellt, erkennt man allerdings, daß sie größer ist, als es zuerst erscheint. Die analytische Methode bietet den Vorzug einer klaren Übersicht, liefert gleichfalls öfters Proben, ist auch verhältnismäßig einfach durchzuführen und erlaubt außerdem die Wirkung verschiedenster Einzellasten zahlenmäßig zu verfolgen und so die ungünstigste Lastenstellung aufzufinden, wenn dies allgemein einmal nötig werden sollte.

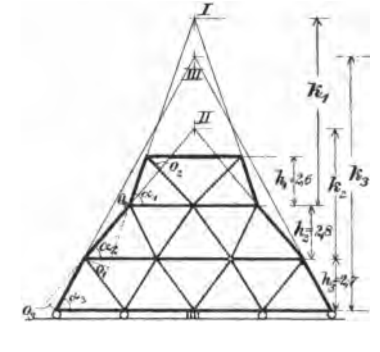
---

[1]) Föppl, D. Fachw. i. R., S. 98, 99.

§ 40. Durchführung eines Zahlenbeispiels für dreigeschossige Scheibenkuppel nach dem Momentenverfahren bei lotrechter Last.

149. Vorliegende Kuppel wurde vom Verfasser zwecks Errichtung auf einem Staatsgebäude berechnet, das jedoch infolge nachträglich hinzugetretener Umstände nicht in der projektierten Weise ausgeführt wurde.

Gegeben waren die Höhe der einzelnen Stockwerke und die Breiten der drei Ringe. In das so festgelegte Gerippe wurde das Gitterwerk nach Abb. 186 eingelegt. Von Lagern sind vier Rollenlager, sonst nur Kugellager vorhanden. Die Hauptmaße sind folgende, wenn Index 1 sich auf das oberste Geschoß bezieht, a die Länge der Schmal- und b diejenige der Breitseite bedeutet:



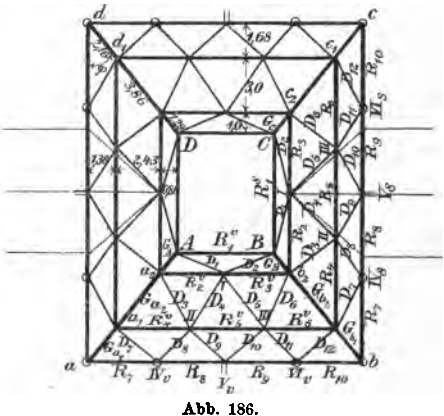


Abb. 186.

$h_1 = 2{,}6$ m,

$h_2 = 2{,}8$,

$h_3 = 2{,}7$,

$a_1 = 5{,}20$,

$a_2 = 6{,}82$,

$a_3 = 11{,}68$,

$a_4 = 14{,}4$,

$b_1 = 6{,}40$,

$b_2 = 8{,}40$,

$b_3 = 14{,}4$,

$b_4 = 17{,}75$.

Im Laufe der Berechnung hat man notwendig die Neigungswinkel der Feldebenen gegen den Horizont und diejenigen der Gratstäbe.

Für die seitlichen Feldebenen findet sich (Abb. 186):

$$\left.\begin{array}{ll} \sin\alpha_1 = 0{,}956, & \cos\alpha_1 = 0{,}298, \\ \sin\alpha_2 = 0{,}755, & \cos\alpha_2 = 0{,}655, \\ \sin\alpha_3 = 0{,}894, & \cos\alpha_3 = 0{,}450. \end{array}\right\} \qquad (102)$$

Für die vorderen und hinteren Ebenen:

$$\left.\begin{array}{ll} \sin\alpha_1 = 0{,}932, & \cos\alpha_1 = 0{,}360, \\ \sin\alpha_2 = 0{,}683, & \cos\alpha_2 = 0{,}732, \\ \sin\alpha_3 = 0{,}850, & \cos\alpha_3 = 0{,}528. \end{array}\right\} \qquad (103)$$

Die Gratneigungen sind gegeben durch:

$$\left.\begin{array}{ll} \sin\chi_1 = 0{,}897, & \cos\chi_1 = 0{,}445, \\ \sin\chi_2 = 0{,}587, & \cos\chi_2 = 0{,}809, \\ \sin\chi_3 = 0{,}78\ \ , & \cos\chi_3 = 0{,}624. \end{array}\right\} \qquad (104)$$

Der Winkel, den die Horizontalprojektion des Grats mit den seitlichen Ringen einschließt, ist ausgedrückt durch:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{14{,}4}{17{,}75} = 0{,}81,$$

$$\sin\varphi = 0{,}630, \qquad \cos\varphi = 0{,}777.$$

Zur Aufstellung der verschiedenen Momentengleichungen braucht man weiter die Entfernungen k_1 der Schnittlinie der zwei oberen, gegenüberliegenden Feldebenen vom unteren (also zweiten) Ring $a_2 b_2 c_2 d_2$, ferner k_2 der zwei zweiten gegenüberliegenden Feldebenen von ihrem unteren Ring $a_1 b_1 c_1 d_1$, entsprechend k_3. Es findet sich

für den Schnitt der seitlichen Felder:

$$\left.\begin{array}{r} k_1 : \frac{6{,}82}{2} = 2{,}6 : 0{,}81, \\ k_1 = 10{,}95\ \text{m}, \\ k_2 : \frac{11{,}68}{2} = 2{,}8 : 2{,}43, \\ k_2 = \ \ 6{,}73\ \text{m}, \\ k_3 : \frac{14{,}4}{2} = 2{,}7 : 1{,}36, \\ k_3 = 14{,}29\ \text{m}, \end{array}\right\} \qquad (105)$$

für den Schnitt der vorderen und hinteren Felder:

$$\left.\begin{aligned} k_1 : \frac{8,4}{2} &= 2,6 : 1,0, \\ k_1 &= 10,92 \text{ m}, \\ k_2 : \frac{14,4}{2} &= 2,8 : 3,0, \\ k_2 &= 6,72 \text{ m}, \\ k_3 : \frac{17,75}{2} &= 2,7 : 1,68, \\ k_3 &= 14,26 \text{ m}. \end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

Ferner werden benötigt die in Abb. 186 eingetragenen Hebelarme o_i. Da die Winkel α_1, α_2, α_3 und die Längen der Seiten bekannt sind, ist die Berechnung rasch erledigt; es ergibt sich bezüglich der seitlichen Ebenen:

$$\left.\begin{aligned} o_1^s &= 3,71 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 3,71 \cdot 0,401 = 1,49 \text{ m}, \\ o_2^s &= 2,72 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 2,72 \cdot 0,401 = 1,09 \text{ m}, \\ o_3^s &= 3,02 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 3,02 \cdot 0,246 = 0,743 \text{ m}, \\ o_4^s &= 3,71 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 3,71 \cdot 0,246 = 0,913 \text{ m}. \end{aligned}\right\} \qquad (107)$$

Für die vordere und hintere Ebene erhält man:

$$\left.\begin{aligned} o_1^v &= 4,10 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 4,10 \cdot 0,436 = 1,788 \text{ m}, \\ o_2^v &= 2,79 \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 2,79 \cdot 0,436 = 1,216 \text{ m}, \\ o_3^v &= 3,18 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 3,18 \cdot 0,262 = 0,833 \text{ m}, \\ o_4^v &= 4,10 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = 4,10 \cdot 0,262 = 1,074 \text{ m}. \end{aligned}\right\} \qquad (108)$$

Eine Hauptrolle spielen weiter in den notwendigen Momentengleichungen, wie schon aus den Bemerkungen des § 38 hervorgeht, die verschiedenen Komponenten der Diagonalen, die wie oben bezeichnet werden mögen:

${}_oD_m$, ${}_kD_m$ Komponenten am oberen Knotenpunkt einer Diagonale in Richtung des Rings und senkrecht dazu;

${}_uD_m$, ${}_fD_m$ Komponenten am unteren Knotenpunkt in Richtung des Rings und senkrecht dazu;

${}_{r}D_{n}$, ${}_{s}D_{n}$ Komponenten einer am Gratpunkt einlaufenden Diagonalspannung in Richtung des Rings und des Grats (Sparrens).

Alle diese Komponenten lassen sich ausdrücken in der Form

$$\lambda \cdot D_m .$$

Um diese verschiedenen Koeffizienten λ zu ermitteln, wurden die verschiedenen Ebenen in „wahrer“ Größe aufgezeichnet, eine beliebige Strecke als Spannung auf den verschiedenen Diagonalen von ihren Endpunkten aus abgetragen und die Komponenten gebildet, wie dieses Abb. 187 darstellt. Die sich er-

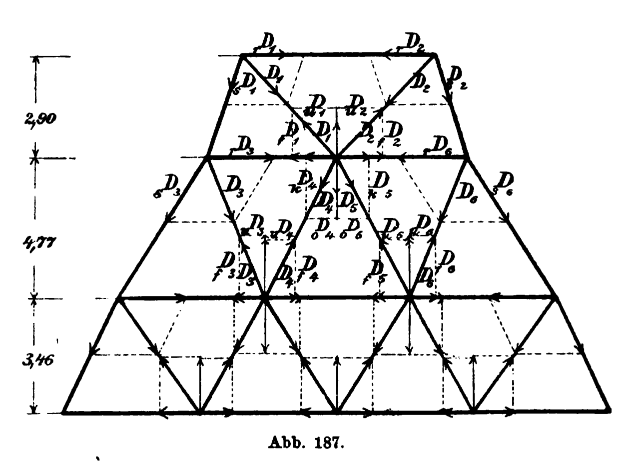


Abb. 187.

gebende Länge der Komponente wurde jedesmal abgemessen und das Verhältnis dieser Länge zu derjenigen der willkürlich angenommenen Spannungslänge zahlenmäßig festgestellt. Ist z. B. D_5 mit 5 cm angenommen worden und ergibt die Messung für ${}_{f}D_5$ eine Länge von 4,53, so hat man:

$${}_{f}D_5 = \frac{4{,}53}{5{,}00} \cdot D_5 = 0{,}906 \cdot D_5 .$$

Die auf diese Weise gefundenen Koeffizienten sind für die Diagonalen der vorderen und hinteren Flächen in folgendem zusammengestellt:

$$\left.\begin{array}{ll}
{}_rD_1 = 0{,}883 \cdot D_1\,, & {}_sD_1 = 0{,}76 \cdot D_1\,, \\
{}_uD_1 = 0{,}683 \cdot D_1\,, & {}_fD_1 = 0{,}733 \cdot D_1\,, \\
{}_rD_2 = 0{,}883 \cdot D_2\,, & {}_sD_2 = 0{,}76 \cdot D_2\,, \\
{}_uD_2 = 0{,}683 \cdot D_2\,, & {}_fD_2 = 0{,}733 \cdot D_2\,, \\
{}_rD_3 = 0{,}894 \cdot D_3\,, & {}_sD_3 = 1{,}106 \cdot D_3\,, \\
{}_uD_3 = 0{,}325 \cdot D_3\,, & {}_fD_3 = 0{,}95 \cdot D_3\,, \\
{}_oD_4 = 0{,}431 \cdot D_4\,, & {}_kD_4 = 0{,}906 \cdot D_4\,, \\
{}_uD_4 = 0{,}431 \cdot D_4\,, & {}_fD_4 = 0{,}906 \cdot D_4\,, \\
{}_oD_5 = 0{,}431 \cdot D_5\,, & {}_kD_5 = 0{,}906 \cdot D_5\,, \\
{}_uD_5 = 0{,}431 \cdot D_5\,, & {}_fD_5 = 0{,}906 \cdot D_5\,, \\
{}_rD_6 = 0{,}894 \cdot D_6\,, & {}_sD_6 = 1{,}106 \cdot D_6\,, \\
{}_uD_6 = 0{,}325 \cdot D_6\,, & {}_fD_6 = 0{,}95 \cdot D_6\,, \\
{}_rD_7 = 0{,}933 \cdot D_7\,, & {}_sD_7 = 0{,}883 \cdot D_7\,, \\
{}_uD_7 = 0{,}583 \cdot D_7\,, & {}_fD_7 = 0{,}817 \cdot D_7\,, \\
{}_oD_8 = 0{,}467 \cdot D_8\,, & {}_kD_8 = 0{,}883 \cdot D_8\,, \\
{}_uD_8 = 0{,}467 \cdot D_8\,, & {}_fD_8 = 0{,}883 \cdot D_8\,, \\
{}_oD_9 = 0{,}533 \cdot D_9\,, & {}_kD_9 = 0{,}858 \cdot D_9\,, \\
{}_uD_9 = 0{,}533 \cdot D_9\,, & {}_fD_9 = 0{,}858 \cdot D_9\,, \\
{}_oD_{10} = 0{,}533 \cdot D_{10}\,, & {}_kD_{10} = 0{,}858 \cdot D_{10}\,, \\
{}_uD_{10} = 0{,}533 \cdot D_{10}\,, & {}_fD_{10} = 0{,}858 \cdot D_{10}\,, \\
{}_oD_{11} = 0{,}467 \cdot D_{11}\,, & {}_kD_{11} = 0{,}883 \cdot D_{11}\,, \\
{}_uD_{11} = 0{,}467 \cdot D_{11}\,, & {}_fD_{11} = 0{,}883 \cdot D_{11}\,, \\
{}_rD_{12} = 0{,}933 \cdot D_{12}\,, & {}_sD_{12} = 0{,}883 \cdot D_{12}\,, \\
{}_uD_{12} = 0{,}583 \cdot D_{12}\,, & {}_fD_{12} = 0{,}817 \cdot D_{12}\,.
\end{array}\right\} \qquad (109)$$

Für die Komponenten von den Diagonalen der seitlichen Feldebenen ergeben sich die folgenden Werte:

$$\left.\begin{array}{ll}
{}_rD_1 = 0{,}992 \cdot D_1\,, & {}_sD_1 = 0{,}692 \cdot D_1\,, \\
{}_uD_1 = 0{,}767 \cdot D_1\,, & {}_fD_1 = 0{,}65 \cdot D_1\,, \\[1ex]
{}_rD_2 = 0{,}992 \cdot D_2\,, & {}_sD_2 = 0{,}692 \cdot D_2\,, \\
{}_uD_2 = 0{,}767 \cdot D_2\,, & {}_fD_2 = 0{,}65 \cdot D_2\,, \\[1ex]
{}_rD_3 = 1{,}175 \cdot D_3\,, & {}_sD_3 = 1{,}175 \cdot D_3\,, \\
{}_uD_3 = 0{,}433 \cdot D_3\,, & {}_fD_3 = 0{,}908 \cdot D_3\,, \\[1ex]
{}_oD_4 = 0{,}542 \cdot D_4\,, & {}_kD_4 = 0{,}842 \cdot D_4\,, \\
{}_uD_4 = 0{,}542 \cdot D_4\,, & {}_fD_4 = 0{,}842 \cdot D_4\,, \\[1ex]
{}_oD_5 = 0{,}542 \cdot D_5\,, & {}_kD_5 = 0{,}842 \cdot D_5\,, \\
{}_uD_5 = 0{,}542 \cdot D_5\,, & {}_fD_5 = 0{,}842 \cdot D_5\,, \\[1ex]
{}_rD_6 = 1{,}175 \cdot D_6\,, & {}_sD_6 = 1{,}175 \cdot D_6\,, \\
{}_uD_6 = 0{,}433 \cdot D_6\,, & {}_fD_6 = 0{,}908 \cdot D_6\,, \\[1ex]
{}_rD_7 = 1{,}09 \cdot D_7\,, & {}_sD_7 = 0{,}85 \cdot D_7\,, \\
{}_uD_7 = 0{,}675 \cdot D_7\,, & {}_fD_7 = 0{,}742 \cdot D_7\,, \\[1ex]
{}_oD_8 = 0{,}567 \cdot D_8\,, & {}_kD_8 = 0{,}833 \cdot D_8\,, \\
{}_uD_8 = 0{,}567 \cdot D_8\,, & {}_fD_8 = 0{,}833 \cdot D_8\,, \\[1ex]
{}_oD_9 = 0{,}625 \cdot D_9\,, & {}_kD_9 = 0{;}792 \cdot D_9\,, \\
{}_uD_9 = 0{,}625 \cdot D_9\,, & {}_fD_9 = 0{,}792 \cdot D_9\,, \\[1ex]
{}_oD_{10} = 0{,}625 \cdot D_{10}\,, & {}_kD_{10} = 0{,}792 \cdot D_{10}\,, \\
{}_uD_{10} = 0{,}625 \cdot D_{10}\,, & {}_fD_{10} = 0{,}792 \cdot D_{10}\,, \\[1ex]
{}_oD_{11} = 0{,}567 \cdot D_{11}\,, & {}_kD_{11} = 0{,}833 \cdot D_{11}\,, \\
{}_uD_{11} = 0{,}567 \cdot D_{11}\,, & {}_fD_{11} = 0{,}833 \cdot D_{11}\,, \\[1ex]
{}_rD_{12} = 1{,}09 \cdot D_{12}\,, & {}_sD_{12} = 0{,}85 \cdot D_{12}\,, \\
{}_uD_{12} = 0{,}675 \cdot D_{12}\,, & {}_fD_{12} = 0{,}742 \cdot D_{12}\,.
\end{array}\right\} \quad (110)$$

150. Die Belastungen mögen getrennt werden in lotrechte Kräfte und Windkräfte und die ersteren zunächst behandelt

werden. Die Kuppel trägt im obersten und zweitobersten Ring eine Plattform, die zur Aufstellung von verschiedenen Apparaten und Vorführung derselben dienen sollte. Man hat demgemäß auch mit Menschengedränge als einer beweglichen Last zu rechnen. Sind keine Personen auf den Plattformen, so ist als ständige Belastung ihr Gewicht und das der Apparate einzuführen; dasselbe wurde eingesetzt mit 350 kg/qm. Als ständige Last kommt außerdem in Betracht das Eigengewicht der Kuppel (160 kg/qm), während Schneelast (veränderliche Last) bei der steilen Neigung des Daches nicht so wichtig ist. Die Größe der sich ergebenden Lasten ist in folgender Tabelle zusammengestellt, wobei dieselben einfach durch die Punkte bezeichnet sind, in denen sie angreifen:

Lastpunkt	Ständige Last: Kuppel u. Plattform kg	Schneelast kg	Menschengedränge kg
$A = B = C = D$	4450	225	3000
$I_v = I_h$	5850	600	3800
$a_2 = b_2 = c_2 = d_2$	3500	600	1250
$II_v = III_v;\ II_h = III_h$	2250	660	—
$a_1 = b_1 = c_1 = d_1$	2450	660	—
$IV_v = V_v = VI_v = IV_h = \cdots = VI_h$	900	225	—
$a = b = c = d$	1000	225	—
I_s	6200	600	3800
$II_s = III_s$	2600	660	—
$IV_s = V_s = VI_s$	1100	225	—

Die Indices v, h, s beziehen sich auf die vorderen, hinteren und seitlichen Flächen.

Entsprechend sollen auch bei der Berechnung die verschiedenen Spannungen mit diesen Indices versehen werden. Der einfachen Schreibweise wegen sind sie im übrigen (mit Aus-

nahme der Gratspannungen) mit Zahlenindices bezeichnet, entsprechend den in Abb. 186 eingetragenen Angaben; die Gratspannungen erhalten als Index den Buchstaben des oberen Gratpunkts.

1. Belastung durch ständige Last.

151. Oberstes Geschoß.

Diagonalen vorn. Der Schnitt um I_v liefert für die Momentenachse $a_1 b_1$ mit Benützung des Hebelarms o_1^v:

$$-({}_fD_1^v + {}_fD_2^v) \cdot o_1^v + I_v \cdot 3{,}0 = 0.$$

Schnitt um A und B ergibt für die Momentenachse: Schnittlinie von $A D d_2 a_2$ und $B C c_2 b_2$, die die Entfernung $(k_1^s - h_1)$ vom obersten Ring hat:

$$(-{}_rD_1^v + {}_rD_2^v) \cdot (k_1^s - h_1) - A \cdot 2{,}6 + B \cdot 2{,}6 = 0.$$

Drückt man die in den Gleichungen auftretenden Komponenten nach S. 319 durch die Spannungen selbst aus und setzt für o_1^v, k_1^s, h_1 die auf S. 317 mitgeteilten Werte ein, so erhält man:

$$-0{,}733 \cdot 1{,}788 \cdot (D_1^v + D_2^v) + 5850 \cdot 3{,}0 = 0,$$
$$0{,}883 \cdot 8{,}35 \cdot (-D_1^v + D_2^v) \qquad = 0,$$

oder:

$$D_1^v = D_2^v = 1{,}144 \cdot I_v = +6680 \text{ kg}. \qquad (111)$$

Diagonalen seitlich. Die erste Gleichung liefert Schnitt um I_s mit $b_1 c_1$ als Momentenlinie und die zweite der Schnitt um B und C bezüglich einer horizontalen Momentenachse, die um k_1^v über dem Ring $a_2 b_2 c_2 d_2$ liegt:

$$-({}_fD_1^s + {}_fD_2^s) \cdot o_1^s + I_s \cdot 2{,}43 = 0,$$
$$(-{}_rD_1^s + {}_rD_2^s) \cdot (k_1^v - h_1) \qquad = 0,$$

oder:

$$-1{,}49 \cdot 0{,}650 \cdot (D_1^s + D_2^s) + I_s \cdot 2{,}43 = 0,$$
$$8{,}32 \cdot 0{,}992 \cdot (-D_1^s + D_2^s) \qquad = 0,$$

also:

$$D_1^s = D_2^s = 1{,}254 \cdot I_s = +7775 \text{ kg}. \qquad (112)$$

Die Diagonalen hinten ergeben entsprechend den vorderen Diagonalen:

$$D_1^h = D_2^h = D_1^v = 1{,}144 \cdot I_h = +6680 \text{ kg}. \qquad (113)$$

Oberringstäbe AB, CD: R_1^v; R_1^h. Zur Erhaltung von R_1^v wird der Schnitt um A gelegt und das Moment bezüglich der Achse $d_2 a_2$ aufgestellt:

$$({}_rD_1^v + R_1^v) \cdot 2{,}6 + A \cdot 0{,}81 = 0,$$

$$0{,}883 \cdot 2{,}6 \cdot D_1^v + A \cdot 0{,}81 + R_1^v \cdot 2{,}6 = 0,$$

$$R_1^v = -0{,}312 \cdot A - 0{,}883 \cdot D_1^v \qquad (114)$$

$$= -7287 \text{ kg},$$

$$R_1^h = R_1^v = -7287 \text{ kg}.$$

Seitliche Oberringstäbe. Für R_1^s (links oder rechts) wurde Schnitt um A gelegt und $a_2 b_2$ als Momentenachse eingeführt:

$$({}_rD_1^s + R_1^s) \cdot 2{,}6 + B \cdot 1{,}0 = 0,$$

$$R_1^s = -\frac{B}{2{,}6} - 0{,}992 \cdot D_1^s \qquad (115)$$

$$= -9424 \text{ kg}.$$

Gratstäbe G_A, G_B, G_C, G_D. Dieselben haben bei der vollen Belastung gleiche Spannungen. Für G_A wurde die Summe aller vertikalen Kräfte an Knotenpunkt A gleich Null gesetzt:

$$(G_A + {}_sD_1^s + {}_sD_1^v) \cdot \sin \chi_1 + A = 0,$$

$$-G_A = 0{,}692 \cdot D_1^s + 0{,}76 \cdot D_1^v + \frac{A}{0{,}897}, \qquad (116)$$

$$+G_A = -\left\{0{,}692 \cdot 7775 + 0{,}76 \cdot 6680 + \frac{4450}{0{,}897}\right\} = -15418 \text{ kg},$$

$$G_A = G_B = G_C = G_D = -15418 \text{ kg}.$$

Damit sind alle Spannungen des obersten Stockwerks bestimmt und man kann zum zweiten Geschoß übergehen.

152. Zweites Geschoß:

Die Kräfte der vorderen Diagonalen werden aus folgenden vier Gleichungen gewonnen:

1. Schnitt um I_v; Momentengleichung für AB:

$$({}_kD_4^v + {}_kD_5^v) \cdot o_2^v - I_v \cdot 1{,}0 = 0;$$

2. Schnitt um II_v; Momentenachse ab:

$$({}_fD_3^v + {}_fD_4^v) \cdot o_3^v + II_v \cdot 1{,}675 = 0;$$

3. Schnitt um III_v; Momentenachse ab:

$$({}_fD_5^v + {}_fD_4^v) \cdot o_3^v + \mathrm{III}_v \cdot 1{,}675 = 0;$$

4. Schnitt um $a_2 \mathrm{I}_v b_2$; Momentenachse horizontal in der Höhe k_2^s über dem Ring $a_1 b_1 c_1 d_1$. Die Momente der äußeren Kräfte a_2, b_2 heben sich gegeneinander auf, ebenso G_A, G_B, sowie D_1^v, D_2^v; ${}_sD_3$, ${}_sD_6$, ${}_kD_4$, ${}_kD_5$ schneiden die Momentenachse, liefern also keinen Beitrag:

$$ {}_rD_3^v - {}_oD_4^v + {}_oD_5^v - {}_rD_6^v = 0.$$

Mit Einsetzung der verschiedenen gegebenen Werte findet sich:

$$\text{I.} \qquad 1{,}216 \cdot 0{,}906 \cdot (D_4^v + D_5^v) - \mathrm{I}_v \cdot 1{,}0 = 0,$$

$$\text{II.} \qquad (0{,}95 \cdot D_3^v + 0{,}906 \cdot D_4^v) \cdot 0{,}833 + \mathrm{II}_v \cdot 1{,}675 = 0,$$

$$\text{III.} \qquad (0{,}95 \cdot D_6^v + 0{,}906 \cdot D_5^v) \cdot 0{,}833 + \mathrm{III}_v \cdot 1{,}675 = 0,$$

$$\text{IV.} \qquad 0{,}894 \cdot (D_3^v - D_6^v) + 0{,}431 \cdot (D_5^v - D_4^v) = 0.$$

Da $\mathrm{II}_v = \mathrm{III}_v$ ist, ergibt die Verbindung von Gleichung II und III:

$$0{,}95 \cdot (D_3^v - D_6^v) - 0{,}906 \cdot (D_5^v - D_4^v) = 0.$$

Diese Gleichung mit Gleichung IV zusammengefügt liefert, da zwei homogene Gleichungen mit $(D_3^v - D_6^v)$ und $(D_5^v - D_4^v)$ als Unbekannte vorliegen (deren Determinante $\gtrless 0$):

$$D_3^v - D_6^v = 0, \qquad D_4^v - D_5^v = 0,$$

$$D_3^v = D_6^v, \qquad D_4^v = D_5^v \tag{117}$$

Demnach ergibt Gleichung I:

$$1{,}216 \cdot 0{,}906 \cdot 2 \cdot D_4^v = \mathrm{I}_v \cdot 1{,}0,$$

$$D_4^v = \mathrm{I}_v \cdot \frac{1}{2{,}203} = +\,2656 \text{ kg} \tag{118}$$

und Gleichung II:

$$0{,}95 \cdot D_3^v + 0{,}906 \cdot D_4^v = -\,\mathrm{II}_v \cdot \frac{1{,}675}{0{,}833},$$

$$D_3^v = -\,(2{,}016 \cdot \mathrm{II}_v + 0{,}954 \cdot D_4^v) \tag{119}$$

$$= -\,7069 \text{ kg}.$$

Also ist:

$$D_6^v = D_3^v = -\,7069 \text{ kg},$$

$$D_4^v = D_5^v = +\,2656 \text{ kg}.$$

Die Diagonalen hinten erhalten die gleichen Spannungen wie die vorderen:

$$D_4^h = D_5^h = +\,2656 \text{ kg},$$
$$D_3^h = D_6^h = -\,7069 \text{ kg}.$$

Die Diagonalen seitlich werden in ganz entsprechender Weise erhalten aus folgenden vier Gleichungen:

$$1{,}09 \cdot 0{,}842 \cdot (D_4^s + D_5^s) - \mathrm{I}_s \cdot 0{,}81 = 0,$$
$$0{,}743 \cdot (0{,}908 \cdot D_3^s + 0{,}842 \cdot D_4^s) + \mathrm{II}_s \cdot 1{,}36 = 0,$$
$$0{,}743 \cdot (0{,}908 \cdot D_6^s + 0{,}842 \cdot D_5^s) + \mathrm{III}_s \cdot 1{,}36 = 0,$$
$$1{,}175 \cdot (D_3^s - D_6^s) + 0{,}542 \cdot (D_5^s - D_4^s) = 0.$$

Aus ihnen ergibt sich:

$$D_3^s = D_6^s, \qquad D_4^s = D_5^s, \tag{120}$$
$$D_4^s = 0{,}441 \cdot \mathrm{I}_s, \tag{121}$$
$$D_3^s = -\,(2{,}015 \cdot \mathrm{II}_s + 0{,}93 \cdot D_4^s), \tag{122}$$

oder mit Einsetzung der Werte für ständiges Gewicht:

$$D_4^s = D_5^s = 0{,}441 \cdot 6200 = 2734 \text{ kg},$$
$$D_3^s = D_6^s = -\,(2{,}015 \cdot 2600 + 0{,}93 \cdot 2734) = -\,7782 \text{ kg}.$$

Die vorderen und hinteren Ringstäbe erhalten alle die gleiche Spannung:

$$R_2^v = R_3^v = R_2^h = R_3^h. \tag{123}$$

Für R_2^v wird ein Schnitt um a_2 gelegt und das Moment bezüglich der Linie $d_1 a_1$ aufgestellt. ${}_sD_3^v$ liefert keinen Beitrag, wohl aber ${}_rD_3^v$, ferner G_A, R_2^v, und die Kraft a_2. Die bekannte Spannung G_A wird in zwei Komponenten zerlegt, eine senkrechte $G_A \cdot \sin\chi_1$ und eine wagrechte $G_A \cdot \cos\chi_1$, letztere nochmals in eine solche in Richtung $d_2 a_2$ und eine in $a_2 b_2$, von denen nur diese für das Moment in Betracht kommt; man erhält demgemäß:

$$({}_rD_3^v + R_2^v) \cdot 2{,}8 + G_A \cdot \cos\chi_1 \cdot \sin\varphi \cdot 2{,}8$$
$$+ (a_2 - G_A \cdot \sin\chi_1) \cdot 2{,}43 = 0,$$
$$(0{,}894 \cdot D_3^v + R_2^v + G_A \cdot 0{,}445 \cdot 0{,}63) \cdot 2{,}8$$
$$+ (a_2 - G_A \cdot 0{,}897) \cdot 2{,}43 = 0$$

und findet:

$$R_2^v = 0{,}5 \cdot G_A - 0{,}87 \cdot a_2 - 0{,}894 \cdot D_3^v. \qquad (124)$$

Mit Einsetzung der Kraft a_2 und der schon oben ermittelten Werte für G_A und D_3^v findet man:

$$R_2^v = 0{,}5 \cdot (-15418) - 0{,}87 \cdot 3500 - 0{,}894 \cdot (-7069) = -4435 \text{ kg},$$

$$R_2^v = R_3^v = R_2^h = R_3^h = -4435 \text{ kg}.$$

Die Spannungen der seitlichen Ringstäbe sind ebenfalls alle gleich:

$$R_2^s = R_3^s.$$

Zur Ermittlung von R_2^s fasse man den Knotenpunkt b_2 (bezw. a_2) ins Auge und wähle $a_1 b_1$ als Momentenachse:

$$({}_rD_3^s + R_2^s + G_B \cdot \cos\chi_1 \cdot \cos\varphi) \cdot 2{,}8$$
$$+ (b_2 - G_B \cdot \sin\chi_1) \cdot 3{,}00 = 0,$$
$$(1{,}175 \cdot D_3^s + R_2^s + G_B \cdot 0{,}445 \cdot 0{,}777) \cdot 2{,}8$$
$$+ (b_2 - G_B \cdot 0{,}897) \cdot 3{,}00 = 0,$$
$$R_2^s = 0{,}615 \cdot G_B - 1{,}07 \cdot b_2 - 1{,}175 \cdot D_3^s. \qquad (125)$$

Für die ständige Last findet man:

$$R_2^s = 0{,}615 \cdot (-15418) - 1{,}07 \cdot 3500 - 1{,}175 \cdot (-7782)$$
$$= -4125 \text{ kg}.$$

Die Gratstäbe a_2a_1, b_2b_1, c_2c_1, d_2d_1 erhalten gleiche Spannungen:

$$G_{a_2} = G_{b_2} = G_{c_2} = G_{d_2}. \qquad (126)$$

Man findet z. B. G_{a_2}, indem man an Knotenpunkt a_2 die Summe aller Vertikalkräfte aufstellt: G_A, G_{a_2}, ${}_sD_3^v$, ${}_sD_3^s$ und a_2 werden einen Beitrag zur Gleichung liefern:

$$({}_sD_3^s + {}_sD_3^v + G_{a_2}) \cdot \sin\chi_2 + a_2 - G_A \cdot \sin\chi_1 = 0,$$

$$1{,}175 \cdot D_3^s + 1{,}106 \cdot D_3^v + G_{a_2} + \frac{a_2}{0{,}587} - G_A \cdot \frac{0{,}897}{0{,}587} = 0,$$

$$G_{a_2} = G_A \cdot 1{,}53 - \frac{a_2}{0{,}587} - 1{,}175 \cdot D_3^s - 1{,}106 \cdot D_3^v. \qquad (127)$$

Bei Einsetzung der für ständige Lasten maßgebenden Werte erhält man:

$$G_{a_2} = -15418 . 1{,}53 - \frac{3500}{0{,}587} - 1{,}175 \cdot (-7782) - 1{,}106 \cdot (-7069)$$
$$= -12490 \text{ kg},$$

$$G_{a_2} = G_{b_2} = G_{c_2} = G_{d_2} = -12490 \text{ kg}.$$

Nachdem so sämtliche Stabkräfte des zweiten Geschosses ermittelt sind, kann man zur Bestimmung derjenigen im dritten Stockwerk schreiten. Es werden wiederum zunächst die Spannungen der Diagonalen berechnet.

153. Drittes Geschoß.

Diagonalen vorn: $D_7^v \cdots D_{12}^v$. Zu ihrer Berechnung dienen folgende Gleichungen:

1. Schnitt um II_v; Momentenachse $a_2 b_2$:

$$({}_kD_8^v + {}_kD_9^v) \cdot o_4^v + \mathrm{II}_v \cdot 3{,}00 = 0;$$

2. Schnitt um III_v; Momentenachse $a_2 b_2$:

$$({}_kD_{10}^v + {}_kD_{11}^v) \cdot o_4^v + \mathrm{III}_v \cdot 3{,}00 = 0;$$

3. Schnitt um IV_v; Momentenachse $\alpha\beta$ im Stützengeschoß. Da die Stützungsstäbe in lotrechter Ebene liegen, schneidet die äußere Kraft die Momentenachse:

$$({}_fD_7^v + {}_fD_8^v) \cdot o_5^v + 0 = 0;$$

4. Schnitt um V_v; Momentenachse $\alpha\beta$:

$$({}_fD_9^v + {}_fD_{10}^v) \cdot o_5^v + 0 = 0;$$

5. Schnitt um VI_v; Momentenachse $\alpha\beta$:

$$({}_fD_{11}^v + {}_fD_{12}^v) \cdot o_5^v + 0 = 0;$$

6. Schnitt um $(a_1, \mathrm{II}_v, \mathrm{III}_v, b_1)$; Momentenachse (Schnittlinie von Ebene $b_1 c_1 c b$ und $d a a_1 d_1$) verläuft horizontal, parallel zu $d_1 a_1$ in der Höhe k_3 über dem Ring $abcd$, also in Höhe $(k_3 - h_3)$ über $a_1 b_1 c_1 d_1$. G_{a_2}, G_{b_2} heben sich mit ihrem Moment gegeneinander auf, ebenso D_3 gegen D_6, D_4 gegen D_5 und II_v gegen III_v, sowie a_1 gegen b_1. Die Diagonalen $D_7 \cdots D_{12}$ liefern einen Momentenbeitrag: von D_7 und D_{12} kommt nur ${}_rD_7$ und ${}_rD_{12}$ in Betracht am Hebelarm $(k_3 - h_3)$; von $D_8 \cdots D_{11}$ sowohl die Komponenten ${}_oD_i$ in Richtung des Rings am Hebel-

arm $(k_3 - h_3)$, wie auch ${}_kD_8$, ${}_kD_9$ usw. Zerlegt man letztere jedesmal in eine wagrechte und senkrechte Komponente

$$ {}_kD_i \cdot \cos\alpha_3 \quad \text{und} \quad {}_kD_i \cdot \sin\alpha_3, $$

so kommt nur letztere zur Geltung, und zwar wirken die Komponenten von D_8, D_9 und D_{10}, D_{11} an demselben Hebelarm $\frac{a_3}{6}$. Man hat demgemäß:

$$ ({}_rD_7^v - {}_oD_8^v + {}_oD_9^v - {}_oD_{10}^v + {}_oD_{11}^v - {}_rD_{12}^v) \cdot (k_3 - h_3) $$
$$ - ({}_kD_{10}^v + {}_kD_{11}^v - {}_kD_8^v - {}_kD_9^v) \cdot \sin\alpha_3 \cdot \frac{a_3}{6} = 0. $$

Die sechs Gleichungen lassen sich unter Berücksichtigung der Zahlenwerte schreiben:

I. $1{,}074 \cdot (0{,}883 \cdot D_8^v + 0{,}858 \cdot D_9^v) + \text{II}_v \cdot 3{,}00 = 0,$

II. $1{,}074 \cdot (0{,}858 \cdot D_{10}^v + 0{,}883 \cdot D_{11}^v) + \text{III}_v \cdot 3{,}00 = 0,$

III. $0{,}817 \cdot D_7^v + 0{,}883 \cdot D_8^v = 0,$

IV. $0{,}858 \cdot D_9^v + 0{,}858 \cdot D_{10}^v = 0,$

V. $0{,}883 \cdot D_{11}^v + 0{,}817 \cdot D_{12}^v = 0,$

VI. $\{0{,}933 \cdot (D_7^v - D_{12}^v) - 0{,}467 \cdot (D_8^v - D_{11}^v) +$
$+ 0{,}533 \cdot (D_9^v - D_{10}^v)\} \cdot 11{,}59$
$+ \{0{,}858 \cdot (D_9^v - D_{10}^v) - 0{,}883 \cdot (D_{11}^v - D_8^v)\} \cdot 1{,}95 = 0.$

Die Verbindungen der ersten und zweiten, bezw. dritten und fünften Gleichung liefern:

$$ 0{,}883 \cdot (D_8^v - D_{11}^v) + 0{,}858 \cdot (D_9^v - D_{10}^v) = 0, $$
$$ 0{,}817 \cdot (D_7^v - D_{12}^v) + 0{,}883 \cdot (D_8^v - D_{11}^v) = 0, $$

so daß diese beiden und Gleichung VI drei homogene Gleichungen bezüglich dieser Differenzen als Unbekannten ergeben; da die Determinante des Systems nicht verschwindet, sind diese Unbekannten alle Null, also:

$$ D_7^v = D_{12}^v, \quad D_8^v = D_{11}^v, \quad D_9^v = D_{10}^v. \qquad (128) $$

Da weiter nach der vierten Gleichung:

$$ D_9^v + D_{10}^v = 0, $$

so ist:

$$ D_9^v = D_{10}^v = 0. \qquad (129) $$

Dann liefert Gleichung I:

$$0{,}883 \cdot D_8^v \cdot 1{,}074 + 0 + \mathrm{II}_v \cdot 3{,}0 = 0,$$

$$D_8^v = -\,\mathrm{II}_v \cdot 3{,}164 \tag{130}$$

und Gleichung III:

$$D_7^v = -\,\frac{0{,}883}{0{,}817} \cdot D_8^v = -\,1{,}08 \cdot D_8^v. \tag{131}$$

Mit Einsetzung der Zahlenwerte für ständige Last findet sich:

$$D_8^v = D_{11}^v = -\,3{,}164 \cdot 2250 = -\,7119 \text{ kg},$$
$$D_7^v = D_{12}^v = -\,1{,}08 \cdot (-7119) = +\,7689 \text{ kg},$$
$$D_9^v = D_{10}^v = 0 \text{ kg}.$$

Daß die symmetrisch gelegenen Diagonalspannungen, wie überhaupt alle symmetrisch angeordneten Stäbe gleiche Spannungen erhalten, ist von vornherein klar, da die Belastung bezüglich beider horizontalen Achsen symmetrisch verteilt ist.

Für die seitlichen Diagonalen gilt ganz dasselbe; man erhält sechs Gleichungen mit sechs Unbekannten, unter denen:

$$D_7^s = D_{12}^s, \quad D_8^s = D_{11}^s, \quad D_9^s = D_{10}^s. \tag{132}$$

Aus der Gleichung des Punktes V_s findet sich:

$${}_fD_9^s + {}_fD_{10}^s = 0{,}792 \cdot (D_9^s + D_{10}^s) = 0,$$

also:

$$D_9^s = D_{10}^s = 0. \tag{133}$$

Knotenpunkt II_s ergibt:

$$({}_kD_8^s + {}_kD_9^s) \cdot o_4^s + \mathrm{II}_s \cdot 2{,}43 = 0,$$

$$0{,}833 \cdot D_8^s + \mathrm{II}_s \cdot \frac{2{,}43}{0{,}913} = 0,$$

$$D_8^s = -\,3{,}2 \cdot \mathrm{II}_s, \tag{134}$$

und schließlich Punkt IV_s:

$${}_fD_7^s + {}_fD_8^s = 0,$$

$$0{,}742 \cdot D_7^s + 0{,}833 \cdot D_8^s = 0,$$

$$D_7^s = -\,1{,}12 \cdot D_8^s. \tag{135}$$

Nach Einsetzung der Zahlenwerte findet sich:

$$D_9^s = D_{10}^s = 0,$$
$$D_8^s = D_{11}^s = -3{,}2 \cdot 2600 = -8320 \text{ kg},$$
$$D_7^s = D_{12}^s = +1{,}12 \cdot 8320 = +9318 \text{ kg}.$$

Von den vorderen Ringstäben erhalten $a_1 II_v$ und $III_v b_1$ gleiche Spannungen:

$$R_4^v = R_6^v. \tag{136}$$

Man erhält R_4 aus Betrachtung des Punktes a_1, indem man das Moment aller wirkenden Kräfte für da als Achse aufstellt. Die Spannung G_{a_2} zerlegt man hierbei wieder in eine vertikale und horizontale Komponente, letztere nochmals in eine in Richtung $d_1 a_1$ und eine solche in $a_1 b_1$, von denen nur diese einen Momentenbeitrag liefert:

$$({}_rD_7^v + R_4^v + G_{a_2} \cdot \cos \chi_2 \cdot \sin \varphi) \cdot 2{,}7 + (a_1 - G_{a_2} \cdot \sin \chi_2) \cdot 1{,}36 = 0,$$
$$(0{,}933 \cdot D_7^v + R_4^v + G_{a_2} \cdot 0{,}809 \cdot 0{,}63) + (a_1 - G_{a_2} \cdot 0{,}587) \cdot \frac{1{,}36}{2{,}7} = 0,$$
$$R_4^v = -0{,}22 \cdot G_{a_2} - 0{,}5 \cdot a_1 - 0{,}933 \cdot D_7^v. \tag{137}$$

Bei Berücksichtigung der für ständige Last gegebenen Werte findet sich:

$$R_4^v = +0{,}22 \cdot 12490 - 0{,}5 \cdot 2450 - 0{,}933 \cdot 7689 = -5651 \text{ kg};$$

ebenso ist:

$$R_4^h = R_6^h = -5651 \text{ kg}.$$

Die Spannung R_5^v wird mittels des Knotenpunktes II_v oder III_v erhalten, indem man die Summe aller Komponenten in der Ringrichtung gleich Null setzt:

$$R_5^v + {}_uD_4^v - {}_uD_3^v + {}_oD_9^v - {}_oD_8^v - R_4^v = 0,$$
$$R_5^v + 0{,}431 \cdot D_4^v - 0{,}325 \cdot D_3^v + 0{,}533 \cdot D_9^v - 0{,}467 \cdot D_8^v - R_4^v = 0. \tag{138}$$

Bei Einfügung der vorliegenden Zahlengrößen ergibt sich:

$$R_5^v = -\{1145 + 2340 + 0 + 3325 + 5651\},$$
$$R_5^v = -12461 \text{ kg}.$$

Ebenso ist natürlich:

$$R_5^h = -12461 \text{ kg.}$$

Zur Berechnung der **seitlichen Ringstäbe** ist entsprechend zu verfahren; für Bestimmung von R_4^s fasse man Schnitt um a_1 ins Auge und stelle das Moment für die Linie ab auf:

$$({}_rD_7^s + R_4^s + G_{a_2} \cdot \cos\chi_2 \cdot \cos\varphi) \cdot 2{,}7 + (a_1 - G_{a_2} \cdot \sin\chi_2) \cdot 1{,}675 = 0,$$

$$(1{,}09 \cdot D_7^s + R_4^s + G_{a_2} \cdot 0{,}809 \cdot 0{,}777) \cdot 2{,}7 + (a_1 - G_{a_2} \cdot 0{,}587) \cdot 1{,}675 = 0,$$

$$R_4^s = -0{,}27 \cdot G_{a_2} - 1{,}09 \cdot D_7^s - 0{,}62 \cdot a_1, \qquad (139)$$

$$R_6^s = R_4^s. \qquad (140)$$

Weiter ist:

$$R_5^s + {}_uD_4^s - {}_uD_8^s + {}_oD_9^s - {}_oD_8^s - R_4^s = 0,$$

$$R_5^s + 0{,}542 \cdot D_4^s - 0{,}433 \cdot D_8^s + 0{,}625 \cdot D_9^s - 0{,}567 \cdot D_8^s - R_4^s = 0. \qquad (141)$$

Bei Benützung der verschiedenen Werte findet man:

$$R_4^s = R_6^s = 0{,}27 \cdot 12490 - 1{,}09 \cdot 9318 - 0{,}62 \cdot 2450 = -8397 \text{ kg},$$

$$R_5^s = -\{0{,}542 \cdot 2734 + 0{,}433 \cdot 7782 + 0 + 0{,}567 \cdot 8320 + 8397\} = -17966 \text{ kg.}$$

Die **Gratstäbe** erhalten gleiche Spannungen:

$$G_{a_1} = G_{b_1} = G_{c_1} = G_{d_1}, \qquad (142)$$

die aus der Summe der Vertikalkomponenten ermittelt werden:

$$({}_sD_7^v + {}_sD_7^s + G_{a_1}) \cdot \sin\chi_3 + (a_1 - G_{a_2} \cdot \sin\chi_2) = 0,$$

$$0{,}883 \cdot D_7^v + 0{,}85 \cdot D_7^s + G_{a_1} + (a_1 - G_{a_2} \cdot 0{,}587) \cdot \frac{1}{0{,}78} = 0,$$

$$G_{a_1} = 0{,}751 \cdot G_{a_2} - \frac{a_1}{0{,}78} - (0{,}883 \cdot D_7^v + 0{,}85 \cdot D_7^s). \qquad (143)$$

Mit den Zahlenwerten findet sich:

$$G_{a_1} = -12490 \cdot 0{,}751 - \frac{2450}{0{,}78} - 0{,}883 \cdot 7689 - 0{,}85 \cdot 9318$$
$$= -27230 \text{ kg},$$
$$G_{a_1} = G_{b_1} = G_{c_1} = G_{d_1} = -27230 \text{ kg}.$$

154. Es fehlen schließlich noch die Spannungen im Auflagerring und die Auflagerkräfte.

Von den vorderen Ringstäben gilt:

$$R_7^v = R_{10}^v, \qquad R_8^v = R_9^v. \tag{144}$$

Zur Ermittlung von R_7^v stelle man die Summe aller Kraftkomponenten an Punkt a in Richtung ab auf:

$$R_7^v + G_{a_1} \cdot \cos \chi_3 \cdot \sin \varphi = 0,$$
$$R_7^v = -G_{a_1} \cdot 0{,}624 \cdot 0{,}63 \tag{145}$$
$$= -0{,}393 \cdot G_{a_1}.$$

Knotenpunkt IV_v ergibt:

$$R_8^v - R_7^v - {}_uD_7^v + {}_uD_8^v = 0,$$
$$R_8^v - R_7^v - 0{,}583 \cdot D_7^v + 0{,}467 \cdot D_8^v = 0,$$
$$R_8^v = R_7^v + 0{,}583 \cdot D_7^v - 0{,}467 \cdot D_8^v. \tag{146}$$

Mit den für ständige Belastung gefundenen Werten erhält man:

$$R_7^v = R_{10}^v = -0{,}393 \cdot (-27230)$$
$$= +10701 \text{ kg},$$
$$R_8^v = R_9^v = +10701 + 0{,}583 \cdot 7689 + 0{,}467 \cdot 7119$$
$$= +18509 \text{ kg}.$$

Die Ringstäbe auf der hinteren Fläche erhalten ebenso große Spannungen.

Für die seitlichen Ringstäbe gelten die Gleichungen:

$$R_7^s = R_{10}^s = -G_{a_1} \cdot 0{,}624 \cdot 0{,}777 = -0{,}485 \cdot G_{a_1}, \tag{147}$$
$$R_8^s = R_9^s = R_7^s + 0{,}675 \cdot D_7^s - 0{,}567 \cdot D_8^s, \tag{148}$$

oder mit Zahlenwerten:

$$R_7^s = R_{10}^s = -0{,}485 \cdot (-27230)$$
$$= +13207 \text{ kg},$$
$$R_8^s = R_9^s = +13207 + 0{,}675 \cdot 9318 + 0{,}567 \cdot 8320$$
$$= +24220 \text{ kg}.$$

Die vertikalen Auflagerdrücke (V) werden erhalten, indem man an dem betreffenden Knotenpunkt die Summe aller Vertikalkomponenten gleich Null setzt:

$$V_a = a - G_{a_1} \cdot \sin \chi_3 = a - 0{,}78 \cdot G_{a_1}. \qquad (149)$$

Weiter ist:

$$V_a = V_b = V_c = V_d. \qquad (150)$$

Bei Einsetzung der Werte für ständige Belastung findet sich:

$$V_a = V_b = V_c = V_d = 1000 + 27230 \cdot 0{,}78$$
$$= 22239{,}4 \text{ kg}.$$

Für die vertikalen Auflagerkräfte in den Zwischenpunkten ergibt sich:

$$V_{\mathrm{IV}}^v = V_{\mathrm{VI}}^v = \mathrm{IV}_v - ({}_fD_7{}^v + {}_fD_8{}^v) \cdot \sin \alpha_3{}^v$$
$$= \mathrm{IV}_v - (0{,}817 \cdot D_7{}^v + 0{,}883 \cdot D_8{}^v) \cdot 0{,}850, \qquad (151)$$
$$V_{\mathrm{V}}^v = \mathrm{V}_v, \qquad (152)$$
$$V_{\mathrm{IV}}^s = V_{\mathrm{VI}}^s = \mathrm{IV}_s - ({}_fD_7{}^s + {}_fD_8{}^s) \cdot \sin \alpha_3{}^s$$
$$= \mathrm{IV}_s - (0{,}742 \cdot D_7{}^s + 0{,}833 \cdot D_8{}^s) \cdot 0{,}894, \qquad (153)$$
$$V_{\mathrm{V}}^s = \mathrm{V}_s. \qquad (154)$$

Beim Ausrechnen erhält man:

$$V_{\mathrm{IV}}^v = V_{\mathrm{VI}}^v = 900 - (0{,}817 \cdot 7689 - 0{,}883 \cdot 7119) \cdot 0{,}850$$
$$= 900 \text{ kg},$$
$$V_{\mathrm{V}}^v = 900 \text{ kg},$$
$$V_{\mathrm{IV}}^s = V_{\mathrm{VI}}^s = 1100 - (0{,}742 \cdot 9318 - 0{,}833 \cdot 8320) \cdot 0{,}894$$
$$= 1100 \text{ kg},$$
$$V_{\mathrm{V}}^s = 1100 \text{ kg}.$$

Die hinteren Auflagervertikalen sind gleich den vorderen und man erkennt, daß diese Kräfte in allen Zwischenpunkten für die vordere und hintere Fläche gleich sind und ebenso diejenigen für die beiden seitlichen Flächen. Alle vertikalen Auflagerkräfte müssen gleich der am betreffenden Punkt wirkenden lotrechten Last sein, da die beiden Kräfte in dieselbe Linie (Lotrechte) fallen.

Die horizontalen Auflagerkräfte besitzen alle den Wert Null, indem für den Unterring auf allen Seiten

$$R_8 = R_9$$

und

$$D_9 = D_{10}$$

ist, und in den Punkten V keine horizontale äußere Kräfte angreifen.

Damit sind denn alle Stabkräfte der Kuppel, wenn sie unter dem Einfluß der ständigen Belastung steht, ermittelt. Zur Probe der Rechnung diene schließlich, daß die Summe der vertikalen Auflagerdrücke gleich derjenigen der Vertikallasten ist:

$$\Sigma V = \Sigma P.$$

Es ist nun:

$$\Sigma V = 4 \cdot 22239{,}4 + 6 \cdot 900 + 6 \cdot 1100$$
$$= 100958 \text{ kg} = \sim 101^t,$$
$$\Sigma P = 4 \cdot 4450 + 4 \cdot 3500 + 4 \cdot 2450 + 4 \cdot 1000 + 2 \cdot 5850$$
$$+ 2 \cdot 6200 + 4 \cdot 2250 + 4 \cdot 2600 + 6 \cdot 900 + 6 \cdot 1100$$
$$= 101100 \text{ kg} = \sim 101^t.$$

Die unwesentliche Differenz zwischen beiden Werten ist auf die Abkürzungen in den Dezimalstellen zurückzuführen.

2. Belastung durch Schnee.

155. Die Rechnung wäre ohne weiteres durchzuführen auf Grund der Formeln 111 bis 154, die ja eine allgemeinere lotrechte Belastung enthalten. Diese Belastung ist ebenfalls bezüglich der Achsen V_v, V_h und V_s, V_s symmetrisch, also werden die bezüglich dieser Achsen symmetrisch gelegenen Stäbe ebenfalls gleiche Spannungen erhalten, ganz wie bei der ständigen Belastung. Da die Durchrechnung in keiner Weise etwas Neues bietet, die Schneelast auch nur wenig wirkt und die für den praktischen Fall notwendigen Ermittlungen der endgültigen Maximal- und Minimalspannungen (Eigengewicht, Schneelast, Menschengedränge, Winddruck) über den Rahmen dieses Buches hinausgehen, soll auf die durch Schneelast hervorgerufenen Spannungen nicht weiter eingegangen werden.

3. Belastung durch Menschengedränge.

156. Auch die dadurch bewirkten Stabkräfte können mittels der Gleichungen 111 bis 154 ermittelt werden. Die Angabe der Berechnung sowie das Ergebnis der Spannungen ist hier insofern von Interesse, als jetzt nur an den zwei oberen Ringen Kräfte angreifen.

Das oberste Geschoß bietet nichts Neues:

Formel 111: $D_1^v = D_2^v = 1{,}144 \cdot 3800 = 4347$ kg,

„ 112: $D_1^s = D_2^s = 1{,}254 \cdot 3800 = 4765$ kg,

„ 113: $D_1^h = D_2^h = \quad = 4347$ kg,

„ 114: $R_1^v = R_1^h = -A \cdot 0{,}312 - 0{,}883 \cdot D_1^v$
$= -936 - 3839 = -4775$ kg,

„ 115: $R_1^s = -B \cdot \frac{1}{2{,}6} - 0{,}992 \cdot D_1^s$
$= -5881$ kg,

„ 116: $G_A = -0{,}692 \cdot D_1^s - 0{,}76 \cdot D_1^v - \frac{A}{0{,}897}$
$= -0{,}692 \cdot 4765 - 0{,}76 \cdot 4347 - \frac{3000}{0{,}897}$,
$G_A = G_B = G_C = G_D = -9947$ kg.

Zweitoberstes Geschoß:

Formel 118: $D_4^v = D_5^v = \frac{3800}{2{,}203} = 1725$ kg,

„ 119: $D_3^v = D_6^v = 0 - 0{,}954 \cdot 1725 = -1646$ kg,

„ — $D_4^h = D_5^h = D_4^v = 1725$ kg,

„ — $D_3^h = D_6^h = D_3^v = -1646$ kg,

„ 121: $D_4^s = D_5^s = 0{,}441 \cdot 3800 = +1676$ kg,

„ 122: $D_3^s = D_6^s = 0 - 0{,}93 \cdot 1676 = -1559$ kg,

„ 124: $R_2^v = -0{,}5 \cdot 9947 - 0{,}87 \cdot 1250 + 0{,}894 \cdot 1646$
$= -4589$ kg,

„ 123: $R_3^v = R_2^v = R_2^h = R_3^h = -4589$ kg,

„ 125: $R_2^s = -0{,}615 \cdot 9947 - 1250 \cdot 1{,}07 + 1559 \cdot 1{,}175$
$= -5623$ kg,

„ — $R_3^s = R_2^s = -5623$ kg,

Formel 127: $G_{a_2} = -1{,}53 \cdot 9947 - \frac{1250}{0{,}587} + 1{,}175 \cdot 1559$
$+ 1{,}106 \cdot 1646$
$= -13696$ kg,

„ 126: $G_{b_2} = G_{c_2} = G_{d_2} = G_{a_2} = -13696$ kg.

Drittes Stockwerk:

Formel 129: $D_9^v = D_{10}^v = 0$,

„ 130: $D_8^v = D_{11}^v = -3{,}164 \cdot \mathrm{II}^v = 0$,

„ 131: $D_7^v = D_{12}^v = -1{,}08 \cdot D_8^v = 0$,

„ — $D_7^h = D_8^h = \cdots D_{12}^h = 0$,

„ 133: $D_9^s = D_{10}^s = 0$,

„ 135: $D_7^s = D_{12}^s = 0$,

„ 134: $D_8^s = D_{11}^s = 0$,

„ 137: $R_4^v = -0{,}22 \cdot G_{a_2} - 0{,}5 \cdot a_1 - 0{,}933 \cdot D_7^v$
$= +0{,}22 \cdot 13696 - 0 - 0$
$= +3013$ kg,

„ 136: $R_6^v = R_4^h = R_6^h = R_4^v = +3013$ kg,

„ 138: $R_5^v = -0{,}431 \cdot 1725 - 0{,}325 \cdot 1646 + 0 - 0 + 3013$
$= 1725$ kg,

„ — $R_5^h = R_5^v = 1725$ kg,

„ 139: $R_4^s = R_6^s = +0{,}27 \cdot 13696 - 0 - 0$
$= 3698$ kg,

„ 141: $R_5^s = -0{,}542 \cdot 1676 - 0{,}433 \cdot 1559 - 0 + 0 + 3698$
$= +2115$ kg,

„ 143: $G_{a_1} = 0{,}751 \cdot -13696 - 0 - 0 - 0$
$= -10286$ kg,

„ 142: $G_{a_1} = G_{b_1} = G_{c_1} = G_{d_1} = -10286$ kg.

Für die Stäbe des Lagerrings findet sich:

Formel 145: $R_7^v = -G_{a_1} \cdot 0{,}624 \cdot 0{,}63 = +0{,}393 \cdot 10286$
$= +4042$ kg,

„ 146: $R_8^v = R_7^v + 0 + 0 = R_7^v$,

Formel 144: $R_7^v = R_{10}^v = R_8^v = R_9^v = R_7^h = R_8^h = R_9^h = R_{10}^h$
$= + 4042$ kg,

„ 147: $R_7^s = - 0{,}485 \cdot G_{b_1} = + 0{,}485 \cdot 10286$ kg
$= + 4989$ kg,

„ — $R_7^s = R_{10}^s = 4989$ kg,

„ 148: $R_8^s = R_7^s + 0 + 0 = R_7^s$.

„ — $R_9^s = R_8^s$.

Lagerreaktionen:

Formel 149:

$$V_a = V_b = V_c = V_d = 0{,}78 \cdot 10286 = 8023 \text{ kg}.$$

Alle übrigen Reaktionen sind Null, da in den unteren Knotenpunkten keine Kräfte (weder innere, noch äußere) wirken.

Probe: Es muß sich ergeben:

$$\Sigma V = \Sigma P.$$

Nun ist aber:

$\Sigma V = 4 \cdot 8023 = 32{,}1^t$,

$\Sigma P = 4 \cdot 3000 + 4 \cdot 1250 + 4 \cdot 3800 = 32200 \text{ kg} = 32{,}2^t$.

Der Unterschied zwischen beiden Werten ist durch die Dezimalrechnungen zu erklären.

Horizontale Auflagerreaktionen treten nicht auf.

§ 41. Fortsetzung. Belastung durch Windkräfte.

157. An das Kuppeldach schließen sich von beiden Seiten Satteldächer an (in Abb. 186 angedeutet), die den Wind von der Seite her wesentlich einschränken; es genügte darum, nur auf die Windrichtung von vorn bezw. hinten Rücksicht zu nehmen. Die durch letztere Richtung bewirkten Spannungen sind durch diejenigen bei Vorderwind mitgegeben, indem einfach Vorder- und Hinterteil der Kuppel zu vertauschen ist. Für die vordere Windbelastung soll die Berechnung durchgeführt werden. Auf die Spannungen ist von Einfluß der Wind gegen die Vorderseite der Kuppel und derjenige auf die Flächen der Satteldächer, der in den Punkten I_s, II_s als Kraft

angreift. Wohl sind letztere Kräfte von keiner besonderen Größe, aber sie sollen hier im Interesse der Aufstellung der Gleichungen berücksichtigt werden.

Der üblichen Berechnung gemäß wurde der Wind mit 120 kg pro qm Dachfläche eingeführt, der Druck auf die einzelnen Punkte ermittelt und dieser in zwei Komponenten gespalten:

$$W \cdot \sin^2 \alpha \quad \text{horizontal und}$$
$$W \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \text{vertikal.}$$

Natürlich mußte bei der Windbelastung Rücksicht genommen werden, daß sich auf den Ringen Ebenen mit verschiedener Neigung schneiden; es war demgemäß solcher Winddruck, oder besser jede horizontale und vertikale Windkraft aus verschiedenen Teilen zusammenzusetzen. Es ergaben sich für die Windkräfte folgende Werte:

Horizontale Windkräfte	Vertikale Windkräfte
$\bar{A} = \bar{B} = 450$ kg	$A = B = 200$ kg
$\bar{I}_v = 950$ „	$I_v = 700$ „
$\bar{a}_2 = \bar{b}_2 = 500$ „	$a_2 = b_2 = 350$ „
$\overline{II}_v = \overline{III}_v = 1000$ „	$II_v = III_v = 800$ „
$\bar{a}_1 = \bar{b}_1 = 500$ „	$a_1 = b_1 = 400$ „
$\overline{IV}_v = \bar{V}_v = \overline{VI}_v = 500$ „	$IV_v = V_v = VI_v = 300$ „
$\bar{a} = \bar{b} = 250$ „	$a_2 = b_2 = 150$ „
$\bar{I}_s = 400$ „	$I_s = 460$ „
$\overline{II}_s = 400$ „	$II_s = 460$ „

Wie in dieser Zusammenstellung werden auch bei der Durchrechnung die horizontalen Windkräfte stets mit einem Strich ($\bar{}$) versehen, während die vertikalen Kräfte kein weiteres Zeichen erhalten. Alle in der Tabelle nicht angegebenen Punkte sind frei von angreifenden Kräften; also sind:

$$III_s = IV_s = V_s = VI_s = 0,$$

ebenso sämtliche Kräfte auf der hinteren Seite.

Bei der Berechnung können die Formeln 111 bis 154 benützt werden, doch treten jetzt noch die horizontalen Windkräfte neu hinzu. Die Hebelarme dieser verschiedenen Kräfte für die jeweilige Momentenachse können aus den gegebenen Maßen der Abb. 186 sofort entnommen werden.

158. Erster Stock.

Diagonalstäbe D_1, D_2 vorn.

1. Momentenschnitt um A und B:

$$-{}_rD_1^v + {}_rD_2^v = 0.$$

2. Schnitt um I_v:

$$-({}_fD_1^v + {}_fD_2^v) \cdot 1{,}788 + \bar{\mathrm{I}}_v \cdot 2{,}8 + \mathrm{I}_v \cdot 3{,}0 = 0.$$

Die Gleichungen ergeben:

$$D_1^v = D_2^v,$$

$$2 \cdot 0{,}733 \cdot 1{,}788 \cdot D_1^v = \bar{\mathrm{I}}_v \cdot 2{,}8 + \mathrm{I}_v \cdot 3{,}0.$$

Demnach ist:

$$D_1^v = D_2^v = 1{,}069 \cdot \bar{\mathrm{I}}_v + 1{,}144 \cdot \mathrm{I}_v = 1{,}069 \cdot 950 + 1{,}144 \cdot 700$$
$$= 1818 \text{ kg}.$$

Diagonalen seitlich:

Schnitt um B und C:

$$0{,}992 \cdot 8{,}32 \cdot (D_2^s - D_1^s) = \bar{B} \cdot 8{,}32 + B \cdot 3{,}2.$$

Schnitt um I_s:

$$0{,}650 \cdot 1{,}49 \cdot (D_2^s + D_1^s) = \mathrm{I}_s \cdot 2{,}43.$$

Diese Gleichungen liefern:

$$D_2^s - D_1^s = 531,$$
$$D_2^s + D_1^s = 1154,$$

also:

$$D_1^s = 312 \text{ kg}, \qquad D_2^s = 843 \text{ kg}.$$

Diagonalen hinten: Es wirken in C, D, I_h keine Kräfte, darum:

$$D_1^h = D_2^h = 0.$$

22*

Gratstäbe:

$$(G_B + {}_sD_1^s + {}_sD_2^v) \cdot \sin \chi_1 + B = 0,$$

$$G_B = -\frac{200}{0,897} - 0,692 \cdot 312 - 0,76 \cdot 1818$$

$$= -1824 \text{ kg},$$

$$G_A = G_B = -1824 \text{ kg},$$

$$(G_C + {}_sD_2^s + {}_sD_1^h) \cdot \sin \chi_1 + 0 = 0,$$

$$G_C = -0,692 \cdot 843 = -583 \text{ kg},$$

$$G_C = G_D = -583 \text{ kg}.$$

Ringstäbe:

Knotenpunkt B mit $b_2 c_2$ als Momentenachse ergibt:

$$({}_rD_2^v + R_1^v) \cdot 2,6 + B \cdot 0,81 = 0,$$

$$R_1^v = -0,883 \cdot 1818 - 200 \cdot \frac{0,81}{2,6}$$

$$= -1667 \text{ kg}.$$

Weiter ist:

$$R_1^h = 0.$$

Die Spannungen der seitlichen Ringstäbe werden am einfachsten mittels der hinteren Knotenpunkte erhalten, da an diesen keine äußeren Kräfte wirken; so liefert Schnitt um D bezüglich $c_2 d_2$ als Achse:

$$({}_rD_2^s + R_1^s) \cdot 2,6 + 0 = 0,$$

$$R_1^s = -0,992 \cdot D_2^s = -0,992 \cdot 843$$

$$= -836 \text{ kg}.$$

159. Nachdem so alle Spannungen des ersten Stocks ermittelt, kann zum zweiten Geschoß übergegangen werden.

Die vier vorderen Diagonalen sind in der bekannten Weise mittels vier Gleichungen zu ermitteln:

1. Schnitt um $(a_2 \mathrm{I}_v b_2)$, Momentenachse: Schnitt von $a_2 a_1 d_1 d_2$ und $b_2 c_2 c_1 b_1$. Die wagrechten Lasten ergeben kein Moment; dasjenige der senkrechten hebt sich gegeneinander auf. ${}_kD_4$, ${}_kD_5$ schneiden die Momentenachse und man erhält:

I. $\qquad 0,894 \cdot (D_3^v - D_6^v) + 0,431 \cdot (D_5^v - D_4^v) = 0;$

2. Schnitt um I_v; Momentenachse: AB:

II. $$({}_kD_4^v + {}_kD_5^v) \cdot 1{,}216 - I_v \cdot 1{,}0 - \bar{I}_v \cdot 2{,}6 = 0;$$

3. Schnitt um II_v; Momentenachse: ab:

III. $$({}_fD_3^v + {}_fD_4^v) \cdot 0{,}833 + II_v \cdot 1{,}675 + \bar{II}_v \cdot 2{,}7 = 0;$$

4. Schnitt um III_v; Momentenachse ab:

IV. $$({}_fD_5^v + {}_fD_6^v) \cdot 0{,}833 + III_v \cdot 1{,}675 + \bar{III}_v \cdot 2{,}7 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich bei weiterer Behandlung natürlich wieder das Resultat:

$$D_3^v = D_6^v, \qquad D_4^v = D_5^v,$$

da ja die Belastung für die Achse I_v, I_h symmetrisch ist. Alsdann liefert die zweite Gleichung:

$$2 D_4 \cdot 1{,}216 \cdot 0{,}906 - 700 - 950 \cdot 2{,}6 = 0,$$

$$D_5^v = D_4^v = \frac{2882}{2}\ \text{kg} = 1441\ \text{kg}.$$

Gleichung III ergibt mit diesem Wert:

$$0{,}833 \cdot (0{,}95 \cdot D_3^v + 0{,}906 \cdot 1441) + 800 \cdot 1{,}675 + 1000 \cdot 2{,}7 = 0,$$

$$D_6^v = D_3^v = -6488\ \text{kg}.$$

Die Berechnung der seitlichen Diagonalen erfordert mehr Arbeit, da bezüglich der Linie I_s, I_s keine symmetrische Belastung vorhanden ist.

1. Schnitt um $(b_2 I_s c_2)$; Momentenachse: Schnitt von $c_2 d_2 d_1 c_1$ und $a_2 b_2 b_1 a_1$:

$$(-{}_rD_3^s + {}_oD_4^s - {}_oD_5^s + {}_rD_6^s + {}_uD_1^s - {}_uD_2^s - \bar{b}_2 - \bar{I}_s) \cdot 3{,}92$$
$$+ (G_C \cdot \cos\chi_1 - G_B \cdot \cos\chi_1) \cdot \cos\varphi \cdot 3{,}92$$
$$+ (G_B - G_C) \cdot \sin\chi_1 \cdot 4{,}2 - b_2 \cdot 4{,}2 = 0$$

oder:

$$(-{}_rD_3^s + {}_oD_4^s - {}_oD_5^s + {}_rD_6^s) + 1241 \cdot 0{,}445 \cdot 0{,}777$$
$$- (403{,}4 + 400 + 500) - (1241 \cdot 0{,}897 + 350) \cdot \frac{4{,}2}{3{,}9} = 0,$$

I. $$(-{}_rD_3^s + {}_oD_4^s - {}_oD_5^s + {}_rD_6^s) - 2454\ \text{kg} = 0;$$

2. Schnitt um I_s; Momentenachse CB:

II. $$({}_kD_4^s + {}_kD_5^s) \cdot 1{,}09 - I_s \cdot 0{,}81 = 0;$$

3. Schnitt um II_s; Momentenachse cb:

III. $$({}_fD_3^s + {}_fD_4^s) \cdot 0{,}743 + II_s \cdot 1{,}36 = 0;$$

4. Schnitt um III_s; Momentenachse cb:

IV. $$({}_fD_5^s + {}_fD_6^s) \cdot 0{,}743 + 0 = 0.$$

Die wagrechten Windkräfte $\bar{I}_s$, $\bar{II}_s$ tragen zum Moment nichts bei, da sie der betreffenden Momentenachse parallel laufen.

Beim Ausrechnen liefert die dritte bezw. vierte Gleichung:

$$0{,}908 \cdot D_3^s + 0{,}842 \cdot D_4^s = -842,$$
$$0{,}908 \cdot D_6^s + 0{,}842 \cdot D_5^s = 0.$$

Die durch Subtraktion dieser beiden entstandene Gleichung wird mit der ersten:

$$1{,}175 \cdot (D_3^s - D_6^s) + 0{,}542 \cdot (D_5^s - D_4^s) = -2454$$

zusammen betrachtet und man erhält damit zwei Gleichungen mit den Unbekannten

$$(D_3^s - D_6^s) \quad \text{und} \quad (D_5^s - D_4^s),$$

die ergeben:

$$D_4^s - D_5^s = +837.$$

Aus dieser und der zweiten Gleichung (II):

$$D_4^s + D_5^s = \frac{460 \cdot 0{,}81}{0{,}842 \cdot 1{,}09} = +406 \text{ kg}$$

gewinnt man:

$$D_4^s = 622 \text{ kg}, \qquad D_5^s = -216 \text{ kg}.$$

Hiernach liefert Gleichung IV den Wert für D_6^s und III für D_3^s:

$$D_6^s = -\frac{0{,}842}{0{,}908} \cdot D_5^s = 200 \text{ kg},$$
$$D_3^s = -\frac{842}{0{,}908} - \frac{0{,}842}{0{,}908} \cdot D_4^s = -1504 \text{ kg}.$$

Die hinteren Diagonalen erhalten keine Spannung; man erkennt das direkt, wenn man in den vier Gleichungen alle Lasten gleich Null setzt:

$$D_3^h = D_4^h = D_5^h = D_6^h = 0.$$

Die Spannungen der **Ringstäbe** werden geradeso gefunden, wie bei der lotrechten Belastung. Der Schnitt um a_2 liefert bezüglich der Achse $a_1 d_1$ die Momentengleichung:

$$(R_2^v + {}_rD_3^v + G_A \cdot \cos\chi_1 \cdot \sin\varphi) \cdot 2{,}8$$
$$+ (a_2 - G_A \cdot \sin\chi_1) \cdot 2{,}43 = 0,$$
$$(R_2^v - 0{,}894 \cdot 6488 - 1824 \cdot 0{,}445 \cdot 0{,}63 + 350 \cdot 0{,}87$$
$$+ 1824 \cdot 0{,}897 \cdot 0{,}87 = 0.$$

Da nun $a_2 \mathrm{I}_v$ und $\mathrm{I}_v b_2$ gleiche Spannung haben, hat man:

$$R_2^v = R_3^v = + 4583 \text{ kg}.$$

Schnitt um b_2 ergibt für die Momentenachse $a_1 b_1$ die Gleichung:

$$(R_2^s + {}_sD_3^s + \bar{b}_2 + G_B \cdot \cos\chi_1 \cdot \cos\varphi) \cdot 2{,}8$$
$$+ (b_2 - G_B \,.\, \sin\chi_1) \cdot 3{,}0 = 0,$$
$$R_2^s = - \bar{b}_2 + 0{,}615 \cdot G_B - b_2 \cdot 1{,}07 - 1{,}175 \cdot D_3^s$$
$$= - 500 - 350 \cdot 1{,}07 - 0{,}615 \cdot 1824 + 1{,}175 \cdot 1504,$$
$$R_2^s = - 228 \text{ kg}.$$

Der losgelöste Knotenpunkt c_2 liefert für $c_1 d_1$ die Momentengleichung:

$$(R_3^s + {}_rD_6^s + G_C \cdot \cos\chi_1 \cdot \cos\varphi) \cdot 2{,}8 - G_C \cdot \sin\chi_1 \cdot 3{,}0 = 0,$$
$$R_3^s = 0{,}615 \cdot G_C - 1{,}175 \cdot D_6^s = - 0{,}615 \cdot 583 - 1{,}175 \cdot 200$$
$$= - 594 \text{ kg}.$$

Die Knotenpunkte I_s erlauben die Durchführung einer **Rechenprobe**:

$$R_2^s + {}_uD_1^s + {}_oD_4^s = {}_uD_2^s + {}_oD_5^s + R_3^s + \bar{\mathrm{I}}_s.$$

Beim Einsetzen der Werte findet sich eine unbedeutende Abweichung, die durch die Dezimalen zu erklären ist. Für die vordere und hintere Kuppelseite fällt eine derartige Probe fort, da bezüglich der Linie $\mathrm{I}_v \mathrm{I}_h$ die Kräfte symmetrisch liegen.

Die beiden **hinteren Ringstäbe** haben wiederum gleiche Spannung; man findet dieselbe etwa mittels des Knotenpunkts c_2 bei Einführung der Momentenachse $b_1 c_1$:

$$(R_2^h + G_C \cdot \cos\chi_1 \cdot \sin\varphi) \cdot 2{,}8 - G_C \cdot \sin\chi_1 \cdot 2{,}43 = 0,$$
$$R_2^h = R_3^h = - 292 \text{ kg}.$$

Von den Gratstäben haben die beiden vorderen dieselbe Spannung und ebenso die beiden hinteren:

$$G_{a_2} = G_{b_2},$$
$$G_{c_2} = G_{d_2}.$$

Erstere erhält man etwa aus Knotenpunkt a_2, indem man die vertikalen Komponenten aller Kräfte ins Auge faßt:

$$(G_{a_2} + {}_sD_3^v + {}_sD_3^s) \cdot \sin\chi_2 + (a_2 - G_A \cdot \sin\chi_1) = 0,$$

$$G_{a_2} = G_A \cdot 1{,}53 - \frac{a_2}{0{,}587} - 1{,}175 \cdot D_3^s - 1{,}106 \cdot D_3^v$$
$$= -2791 - 596 + 1767 + 7176,$$
$$G_{a_2} = G_{b_2} = 5556 \text{ kg}.$$

Für G_{c_2} benutzt man Knotenpunkt c_2:

$$(G_{c_2} + {}_sD_6^s) \cdot \sin\chi_2 - G_C \cdot \sin\chi_1 = 0,$$
$$G_{c_2} = -1{,}175 \cdot 200 + 1{,}53 \cdot -583 = -1127 \text{ kg},$$
$$G_{c_2} = G_{d_2} = -1127 \text{ kg}.$$

160. Damit ist der zweite Stock auch erledigt und man kann zum dritten Geschoß übergehen.

Bei den vorderen Diagonalen ist wiederum mit Rücksicht auf die symmetrisch verteilte vordere Belastung:

$$D_7^v = D_{12}^v, \qquad D_8^v = D_{11}^v, \qquad D_9^v = D_{10}^v.$$

Die weitere Rechnung ist mit folgenden drei Gleichungen auszuführen:

$$({}_fD_9^v + {}_fD_{10}^v) \cdot \cos\alpha_3 + \overline{\text{V}}_v = 0, \qquad \text{(Punkt V}_v\text{; Achse } \alpha\beta)$$
$$({}_kD_8^v + {}_kD_9^v) \cdot 1{,}074 + \text{II}_v \cdot 3{,}0 + \overline{\text{II}}_v \cdot 2{,}8 = \qquad \text{(Punkt II}_v\text{; Achse } a_2 b_2)$$
$$({}_fD_7^v + {}_fD_8^v) \cdot \cos\alpha_3 + \overline{\text{IV}}_v = 0. \qquad \text{(Punkt IV}_v\text{; Achse } \alpha\beta)$$

Erstere liefert:

$$D_9^v = D_{10}^v = \frac{-500}{2 \cdot 0{,}858 \cdot 0{,}528} = -552 \text{ kg}.$$

Die zweite Gleichung ergibt:

$$D_8^v = \frac{-5200}{0{,}883 \cdot 1{,}074} + \frac{0{,}858 \cdot 552}{0{,}883}$$
$$= -4933 \text{ kg};$$

die dritte:

$$D_7^v = \frac{-500}{0,528 \cdot 0,817} + \frac{4368}{0,817}$$
$$= +4187 \text{ kg.}$$

Die **hinteren Diagonalen** bleiben wieder alle spannungslos:

$$D_7^h = D_8^h = D_9^h = D_{10}^h = D_{11}^h = D_{12}^h = 0.$$

Für die **seitlichen Diagonalen** ist die Rechnungsarbeit eine umständlichere, und zwar liegt dies im wesentlichen an der Momentengleichung für den um $b_1 \mathrm{II}_s \mathrm{III}_s c_1$ gelegten Schnitt bezüglich der Schnittlinie von $a_1 b_1 b a$ und $c_1 d_1 d c$ als Achse. Man erhält hierfür:

$$\begin{aligned}
&(-{}_rD_7^s + {}_oD_8^s - {}_oD_9^s + {}_oD_{10}^s - {}_oD_{11}^s + {}_rD_{12}^s) \cdot 11,56 \\
&+ ({}_uD_3^s - {}_uD_4^s + {}_uD_5^s - {}_uD_6^s) \cdot 11,56 \\
&+ (G_{c_2} - G_{b_2}) \cdot \cos\chi_2 \cdot \cos\varphi \cdot 11,56 - (\bar{b}_1 + \overline{\mathrm{II}}_s) \cdot 11,56 \\
&+ (G_{b_2} - G_{c_2}) \cdot \sin\chi_2 \cdot 7,2 - b_1 \cdot 7,2 \\
&+ ({}_kD_{10}^s - {}_kD_9^s + {}_kD_{11}^s - {}_kD_8^s) \cdot \sin\alpha_3^s \cdot 2,4 \\
&+ ({}_fD_3^s - {}_fD_6^s + {}_fD_4^s - {}_fD_5^s) \cdot \sin\alpha_2^s \cdot 2,4 - \mathrm{II}_s \cdot 2,4 = 0.
\end{aligned}$$

In dieser Gleichung sind alle Größen mit Ausnahme der sechs Diagonalspannungen $D_7 \cdots D_{12}$ bekannt:

$$\begin{aligned}
&(-{}_rD_7^s + {}_oD_8^s - {}_oD_9^s + {}_oD_{10}^s - {}_oD_{11}^s + {}_rD_{12}^s) \\
&- 0,433 \cdot 1704 - 0,542 \cdot 838 - 6683 \cdot 0,809 \cdot 0,777 - 900 \\
&+ 6683 \cdot 0,587 \cdot 0,623 - 400 \cdot 0,623 - 460 \cdot 0,208 \\
&+ \{-1704 \cdot 0,908 + 838 \cdot 0,842\} \cdot 0,755 \cdot 0,208 \\
&+ \{0,792 \cdot (D_{10}^s - D_9^s) + 0,833 \cdot (D_{11}^s - D_8^s)\} \cdot 0,894 \cdot 0,208 = 0.
\end{aligned}$$

Bei weiterer Ausrechnung ergibt sich:

I. $$1,09 \cdot (D_{12}^s - D_7^s) + 0,410 \cdot (D_8^s - D_{11}^s) + 0,774 \cdot (D_{10}^s - D_9^s) = 4327.$$

Als weitere fünf Gleichungen können aufgestellt werden:

II. $({}_kD_8^s + {}_kD_9^s) \cdot 0,913 + \mathrm{II}_s \cdot 2,43 = 0.$ (Knotenpunkt II_s)

III. ${}_kD_{10}^s + {}_kD_{11}^s = 0,$ (Punkt III_s)

IV. $\quad {}_fD_7^s + {}_fD_8^s = 0, \quad$ (Punkt IV$_s$)

V. $\quad {}_fD_9^s + {}_fD_{10}^s = 0, \quad$ (Punkt V$_s$)

VI. $\quad {}_fD_{11}^s + {}_fD_{12}^s = 0, \quad$ (Punkt VI$_s$)

Verbindet man, nachdem man die Komponenten der Spannungen durch diese selbst ausgedrückt hat, Gleichung IV und VI, und dann diese Vereinigung mit Gleichung I, so erhält man:

$$1{,}212 \cdot (D_8^s - D_{11}^s) + 0{,}574 \cdot (D_{10}^s - D_9^s) = 3211.$$

Dazu benütze man die Vereinigung von II und III:

$$0{,}833 \cdot (D_8^s - D_{11}^s) - 0{,}792 \cdot (D_{10}^s - D_9^s) = -1224.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich:

$$D_{10}^s - D_9^s = 2892.$$

Da andrerseits nach Gleichung V:

$$D_{10}^s + D_9^s = 0$$

ist, so hat man:

$$D_{10}^s = +1446 \text{ kg},$$
$$D_9^s = -1446 \text{ kg}.$$

Nun liefert weiter:

Gleichung II:

$$0{,}833 \cdot D_8^s = -1224 - 0{,}792 \cdot D_9^s = -1224 + 0{,}792 \cdot 1446,$$
$$D_8^s = -95 \text{ kg};$$

Gleichung III:

$$D_{11}^s = -\frac{0{,}792}{0{,}833} \cdot D_{10} = -0{,}951 \cdot 1446$$
$$= -1375 \text{ kg};$$

Gleichung IV:

$$D_7^s = -\frac{0{,}833}{0{,}742} \cdot D_8^s = -1{,}123 \cdot (-95)$$
$$= +107 \text{ kg};$$

Gleichung VI:

$$D_{12}^s = -\frac{0{,}833}{0{,}742} \cdot D_{11}^s = +1{,}123 \cdot 1375$$
$$= +1544 \text{ kg}.$$

Von den vorderen Ringstäben haben R_4^v und R_6^v gleiche Spannungen. Mittels Knotenpunkt a_1 erhält man:

$$(R_4^v + {}_rD_7^v + G_{a_2} \cdot \cos\chi_2 \cdot \sin\varphi) \cdot 2{,}7$$
$$+ (a_1 - G_{a_2} \cdot \sin\chi_2) \cdot 1{,}36 = 0,$$
$$R_6^v = R_4^v = -0{,}22 \cdot 5556 - 200 - 0{,}933 \cdot 4187$$
$$= -5328 \text{ kg}.$$

Knotenpunkt II_v oder III_v ergibt sodann:

$$R_5^v = -0{,}431 \cdot D_4^v + 0{,}331 \cdot D_3^v - 0{,}533 \cdot D_9^v$$
$$+ 0{,}467 \cdot D_8^v + R_4^v,$$

indem die Summe aller Kraftkomponenten in der Ringrichtung verschwinden muß; es findet sich hieraus:

$$R_5^v = -0{,}431 \cdot 1441 - 0{,}325 \cdot 6488 + 0{,}533 \cdot 552$$
$$- 0{,}467 \cdot 4933 - 5328$$
$$R_5^v = -10107 \text{ kg}.$$

Für die hinteren Ringstäbe bekommt man in entsprechender Weise:

$$(R_4^h + {}_rD_7^h + G_{c_2} \cdot \cos\chi_2 \cdot \sin\varphi) \cdot 2{,}7$$
$$+ (0 - G_{c_2} \cdot \sin\chi_2) \cdot 1{,}36 = 0,$$
$$R_4^h = -0{,}22 \cdot G_{c_2} = +0{,}22 \cdot 1127$$
$$= +248 \text{ kg}.$$

Da alle Diagonalspannungen auf der Rückfläche den Wert Null besitzen, ergibt sich:

$$R_6^h = R_5^h = R_4^h = +248 \text{ kg}.$$

Bei den seitlichen Ringen sind die Spannungen der drei Stäbe verschieden. Knotenpunkt b_1 liefert:

$$(R_4^s + \bar{b}_1 + {}_rD_7^s + G_{b_2} \cdot \cos\chi_2 \cdot \cos\varphi) +$$
$$+ (b_1 - G_{b_2} \cdot \sin\chi_2) \cdot \frac{1{,}675}{2{,}7} = 0,$$
$$R_4^s = -500 - 0{,}809 \cdot 0{,}777 \cdot 5556 - 1{,}09 \cdot 107$$
$$- (400 - 5556 \cdot 0{,}587) \cdot 0{,}62,$$
$$R_4^s = -2343.$$

Knotenpunkt II_s werde zur Berechnung von R_5^s benützt:

$$R_5^s = R_4^s + {}_uD_3^s - {}_uD_4^s + {}_oD_8^s - {}_oD_9^s - \overline{\mathrm{II}}_s$$
$$= -2343 - 0{,}433 \cdot 1504 - 0{,}542 \cdot 622 - 0{,}567 \cdot 95$$
$$+ 0{,}625 \cdot 1446 - 400,$$
$$R_5^s = -2901;$$

und schließlich Punkt c_1 zur Bestimmung von R_6^s:

$$R_6^s + 1{,}09 \cdot D_{12}^s + G_{c_2} \cdot 0{,}266 = 0,$$
$$R_6^s = 0{,}266 \cdot 1127 - 1{,}09 \cdot 1544 = -1379.$$

Zur Probe diene die Bedingung, daß an Knotenpunkt III_s die Summe aller Kraftkomponenten in der Richtung $b_1 \mathrm{II}_s \mathrm{III}_s c_1$ verschwinden muß:

$$R_6^s + {}_uD_6^s + {}_oD_{11}^s = R_5^s + {}_uD_5^s + {}_oD_{10}^s.$$

Beim Ausrechnen liefert die linke Seite (-2077), die rechte (-2114), also eine unwesentliche Differenz.

Von den Gratstäben haben wieder die beiden vorderen und die beiden hinteren je gleiche Spannung. Es ergibt sich:

$$({}_sD_7^v + {}_sD_7^s + G_{a_1}) \cdot \sin\chi_3 + a_1 - G_{a_2} \cdot \sin\chi_2 = 0, \qquad \text{(Punkt } a_1\text{)}$$
$$0{,}883 \cdot D_7^v + 0{,}85 \cdot D_7^s + G_{a_1} + \frac{400}{0{,}78} - G_{a_2} \cdot 0{,}751 = 0,$$
$$G_{a_1} = G_{b_1} = -131 \text{ kg};$$

und:

$$({}_sD_{12}^s + {}_sD_7^h + G_{c_1}) \cdot \sin\chi_3 - G_{c_2} \cdot \sin\chi_2 = 0, \qquad \text{(Punkt } c_1\text{)}$$
$$G_{c_1} = 0{,}751 \cdot G_{c_2} - 0{,}85 \cdot D_{12}^s - 0 = -846{,}4 - 1312{,}4,$$
$$G_{c_1} = G_{d_1} = -2159 \text{ kg}.$$

161. Man kann nun den Auflagerring untersuchen. An Knotenpunkt a ergibt die Summe aller Kraftkomponenten in Richtung $a\,\mathrm{IV}_v$:

$$R_7^v = -0{,}393 \cdot G_{a_1} = -0{,}393 \cdot (-131) = +51 \text{ kg},$$
$$R_7^v = R_{10}^v = 51 \text{ kg}.$$

Weiter liefert Punkt IV_v:

$$R_8^v = R_7^v + 0{,}583 \cdot D_7^v - 0{,}467 \cdot D_8^v$$
$$= 51 + 0{,}583 \cdot 4187 + 0{,}467 \cdot 4933 = 4796 \text{ kg},$$
$$R_8^v = R_9^v = +4796 \text{ kg}.$$

In entsprechender Weise finden sich die Spannungen der hinteren und seitlichen Ringstäbe:

$$R_7^h = -0{,}393 \cdot G_{c_1} = -0{,}393 \cdot (-2159) = 848 \text{ kg}, \qquad \text{(Punkt } c\text{)}$$

$$R_7^h = R_8^h, \qquad \text{(Punkt IV}_h\text{)}$$

$$R_7^h = R_8^h = R_9^h = R_{10}^h = 848 \text{ kg}.$$

$$R_7^s + \bar{b} + G_{b_1} \cdot \cos\chi_3 \cdot \cos\varphi = 0, \qquad \text{(Punkt } b\text{)}$$

$$R_7^s = -0{,}485 \cdot (-131) - 250 = -186 \text{ kg}.$$

$$R_8^s = R_7^s + 0{,}675 \cdot D_7^s - 0{,}567 \cdot D_8^s = -186 + 0{,}675 \cdot 107 + 0{,}567 \cdot 95 = -60 \text{ kg}, \qquad \text{(Punkt IV}_s\text{)}$$

$$R_{10}^s = -0{,}485 \cdot G_{c_1} = -0{,}485 \cdot (-2159) = +1047 \text{ kg}, \qquad \text{(Punkt } c\text{)}$$

$$R_9^s = R_{10}^s + 0{,}675 \cdot D_{12}^s - 0{,}567 \cdot D_{11}^s = 1047 + 1042 + 780 = +2869 \text{ kg}. \qquad \text{(Punkt VI}_s\text{)}$$

Horizontale Auflagerkräfte (H) treten nur in den Punkten V_s auf, da vorn und hinten symmetrische Kraftverteilung vorhanden. Wird die Richtung nach vorn positiv eingeführt, so ergibt Punkt V_s:

$$H_V^s = R_9^s + {}_uD_{10}^s - R_8^s - {}_uD_9^s = 2869 + 0{,}625 \cdot 1446 + 60 + 0{,}625 \cdot 1446 = 4737 \text{ kg}.$$

Die Summe der horizontalen Auflagerkräfte in der Richtung von hinten nach vorn ist:

$$2 \cdot 4737 = 9474 \text{ kg},$$

da nur in V_s auf beiden Seiten diese Kräfte auftreten. Dieser Wert muß gleich sein der Summe der horizontalen Windkräfte:

$$\Sigma \overline{P} = 900 + 950 + 1000 + 2000 + 1000 + 1500 + 500 + 800 + 800 = 9450 \text{ kg}.$$

Es fehlen schließlich noch die vertikalen Lagerkräfte (V):

$V_a = V_b = a - G_{a_1} \cdot \sin\chi_8 = 150 + 131 \cdot 0{,}78$
$= + 252$ kg, (Punkt a)

$V_c = V_d = - G_{c_1} \cdot \sin\chi_8 = 2159 \cdot 0{,}78$
$= + 1684$ kg, (Punkt c)

$V_{IV}^v = IV_v - ({}_fD_7^v + {}_fD_8^v) \cdot \sin\alpha_8^v$
$= 300 + 935 \cdot 0{,}85 = + 1095$ kg, (Punkt IV_v)

$V_V^v = V_v - ({}_fD_9^v + {}_fD_{10}^v) \cdot \sin\alpha_8^v$
$= 300 + 0{,}858 \cdot 2 \cdot 552 \cdot 0{,}85 = 1105$ kg, (Punkt V_v)

$V_{VI}^v = V_{IV}^v = 1095$ kg.

Die vertikalen Reaktionen an den seitlichen Ringen besitzen alle den Wert Null, da die Gleichungen IV—VI auf S. 346 gelten:

$$V_{IV}^s = V_V^s = V_{VI}^s = 0;$$

ebenso treten auf den hinteren Seiten keine vertikalen Drücke auf, da sämtliche Diagonalen keine Spannungen haben:

$$V_{IV}^h = V_V^h = V_{VI}^h = 0.$$

Zur Probe dient, daß die Summe der vertikalen Lagerreaktionen gleich derjenigen der vertikalen Kräfte (ΣP) sein muß. Es ist:

$$\Sigma V = 2 \cdot 252 + 2 \cdot 1684 + 2 \cdot 1095 + 1105$$
$$= 7167 \text{ kg} = \sim 7{,}2^t;$$
$$\Sigma P = 2 \cdot 200 + 700 + 2 \cdot 350 + 2 \cdot 800 + 2 \cdot 400$$
$$+ 2 \cdot 460 + 2 \cdot 460 + 3 \cdot 300 + 2 \cdot 150$$
$$= 7240 \text{ kg} = \sim 7{,}2^t.$$

Von weiterer Untersuchung der Kuppel, insbesondere der Frage, wie die einzelnen Stäbe am ungünstigsten beansprucht werden, kann Abstand genommen werden, da diese Überlegungen in ein mehr praktisches Werk gehören.

Neuntes Kapitel.

Geschlossene Systeme; Dachfachwerke.

§ 42. Geschlossene Kuppeln.

162. Auf diese wurde in den vorhergehenden Paragraphen noch kaum eingegangen, nur wurde von einem geschlossenen Flechtwerksteil mit $n$seitigem Unterring bewiesen, daß er zur stabilen Lagerung $(n+3)$ Lagerbedingungen besitzen müsse. Auf Grund dieses Satzes lassen sich nun die geschlossenen Kuppeln kurz behandeln.

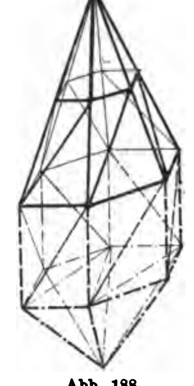


Abb. 188.

Es möge zunächst ein einfaches Zeltdach (Abb. 188) betrachtet werden. Der Teil unterhalb des obersten Rings ist wie die Kuppelsysteme in § 24 gebaut, die zu ihrer stabilen Lagerung $2n$ Stützungsstäbe nötig haben. Da nun die Spitze des Zeltdachs an den obersten Ring durch n Stäbe angefügt ist, zum festen Anschluß derselben jedoch drei Stäbe ausreichen, würde das mit der Spitze versehene System bei Vorhandensein der $2n$ Lagerstäbe $(n-3)$ Stäbe zuviel aufweisen. Um es statisch bestimmt zu machen, sind $(n-3)$ Stäbe zu entfernen, die etwa den Stützungsstäben entnommen werden können; an diesen verbleiben demnach noch:

$$2n-(n-3)=n+3,$$

eine Zahl, die mit der des allgemeinen Satzes übereinstimmt.

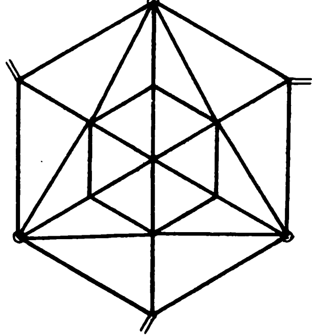


Abb. 189.

Für eine sechsseitige Zeltkuppel kann demgemäß die Lagerung derart erfolgen, daß an die Stelle dreier Rollenlager: Kugellager treten (Abb. 189). In diesem Fall dürfen die Gleitrichtungen der Kurvenlager auch nach dem Mittelpunkt

gerichtet sein, ohne daß dadurch die Stabilität beeinträchtigt wird.

Es läßt sich dies am einfachsten an einem vierseitigen Zeltdach zeigen, z. B. mit Hilfe von Stabvertauschung. Nimmt man den Stab S in Abb. 190 weg und führt dafür den Ersatzstab III ein, so erhält man ein sicher stabiles System, indem zuerst A festgelegt ist, dann B, C, D und die Spitze. Durch eine beliebige Zugkraft S in Richtung des fortgenommenen Stabes erhalten die Stäbe 1, 2, 3 gleiche Spannungen von der Größe S, und zwar 1: Zug, dagegen 2 und 3: Druck. Bei weiterer Betrachtung an den Punkten C, B, D, A erkennt man, daß die Spannungen O_3 und O_4 sicher gleichgerichtet (Zugspannungen) sind. Sie haben demgemäß eine Resultante, die innerhalb des Winkels DAB, also jedenfalls nicht in die Ebene $\overline{\text{I, II}}$ fällt, und durch sie tritt auch in III sicher eine Spannung (und zwar Zug) auf. Außerdem wirkt an A die Stabkraft 1, die aber ebenfalls in allen drei Stäben I, II, III eine Spannung und zwar wieder in III Zug bewirkt; es wird also durch die beliebige Spannung S im Ersatzstab sicher eine Spannung hervorgerufen, er erhält nicht die Spannung Null. Das vorliegende Stabsystem ist demnach stabil.

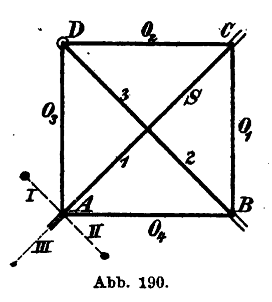


Abb. 190.

Der Nachweis hätte auch geschehen können nach dem Satz, daß beim Fehlen von äußeren Kräften in allen Stäben eines gestützten Systems mit $3n$ Stäben (Stützungsstäbe eingeschlossen) die Spannung Null eindeutig auftreten muß. Zu diesem Zweck betrachte man den Knotenpunkt A (an dem vorhin der Ersatzstab einlief). Die Resultante von O_3, O_4, 1 müßte bei Gleichgewicht an A in die Ebene I, II fallen. Nun geht aber aus obigem hervor, daß die Resultante dieser Spannungen, die nur durch beliebige Kraft S im angegebenen Stab entstehen, nicht in die Ebene I, II fällt. Es muß demnach, damit die Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist, die Resultante verschwinden, also auch O_3, O_4, 1 und damit S selbst, weil ja

diese Spannungen irgendwie S proportional sind. Besitzt aber S den Wert Null, so gilt dies auch von allen Spannungen, wie aus Betrachtung der einzelnen Knotenpunkte hervorgeht.

Was für das einfache Zeltdach gilt, hat auch für die Schwedler-Kuppel mit aufgesetztem Zeltdach Gültigkeit: an die Stelle der n Rollenlager bei offener Kuppel treten drei Rollen- und $(n-3)$ Kugellager (Abb. 191). Diese drei Rollenlager dürfen aber jetzt auch bei regelmäßigem Ring nach dem Mittelpunkt gerichtet sein: im Gegensatz zur regelmäßigen offenen Schwedler-Kuppel mit gerader Seitenzahl, bei der die Gleitrichtungen der $2n$ Kurvenlager nicht alle nach dem Mittelpunkt laufen durften, sofern ein stabiles System bestehen sollte.

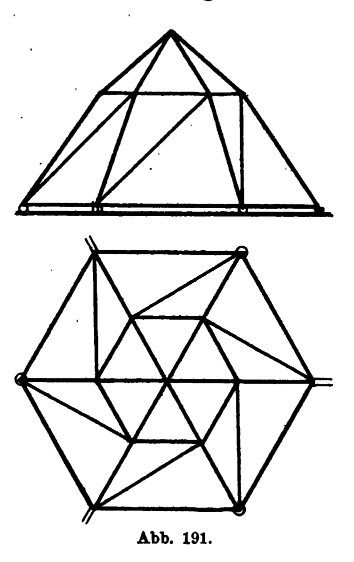


Abb. 191.

163. Ein anderes erwähnenswertes geschlossenes System wird gewonnen, wenn man auf die untere Kuppel irgendwelcher Art eine Laterne und darauf ein Zeltdach lagert. Ist dasselbe vollständig als Flechtwerksmantel ausgebildet und besitzt es die für den unteren offenen Kuppelteil notwendigen Lager, so ist es $(n-3)$-fach statisch unbestimmt. Um es bestimmt zu machen, sind $(n-3)$ Stäbe, entweder Stützungs- oder Systemstäbe, zu entfernen. Als solche kann man nun einen Teil der Diagonalstäbe im Laternengeschoß wählen, hätte also bei vierseitiger Laterne $(n=4)$ mit aufgesetztem Zeltdach:

$$(n-3)=1$$

Diagonalstäbe fortzunehmen. Man kann die Laterne geradezu als Stützengeschoß betrachten, das zur Stützung des Zeltdaches auf der unteren offenen, an sich stabilen Kuppel dient, und kommt so ganz naturgemäß auf den Gedanken, von diesen

Zwischenstützungsstäben $(n-3)$ zu entfernen; es dürfen also dann statt $2n$ nur

$$(n+3)$$

Laternenstäbe vorhanden sein, d. h. etwa n Pfosten und drei Diagonalen.

Ein derartiges System stellt Abb. 192 dar: die untere Kuppel besteht aus einer solchen nach Abb. 159, die eine Schwedler-Kuppel trägt, auf die mittels eines Laternengeschosses mit nur drei Diagonalen $(n+3=7)$ ein Zeltdach aufgesetzt ist.

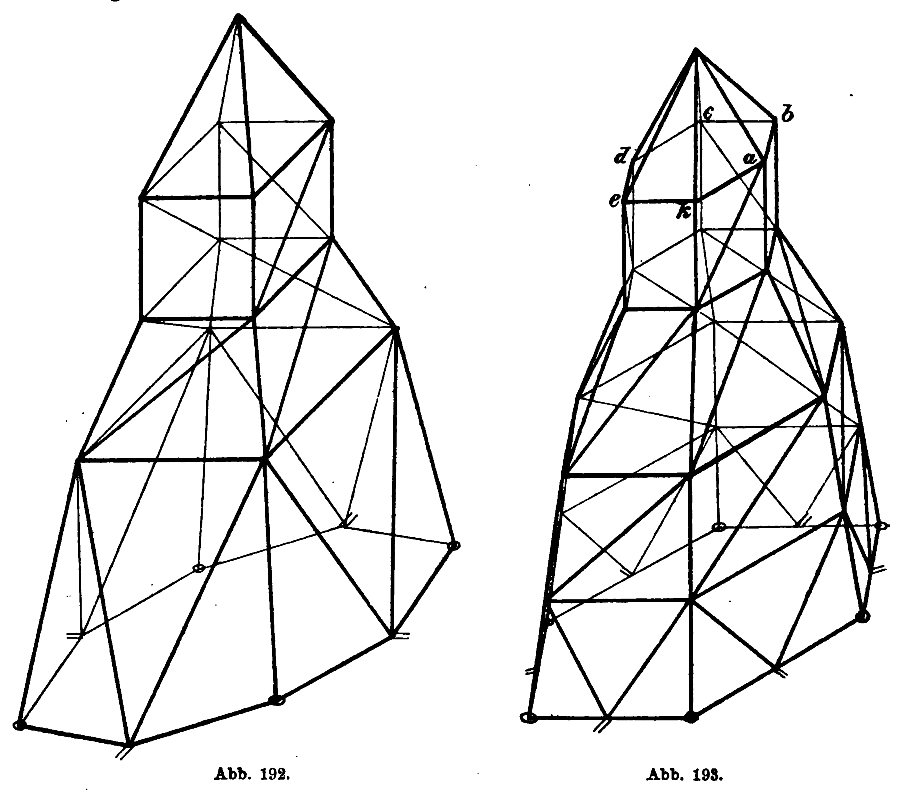


Abb. 192. Abb. 193.

Man erkennt, daß man sich durch zweckmäßige Ausbildung derartiger Kuppeldachsysteme jeder gewünschten architekto-

nischen Form anschließen und die verschiedensten, günstigen Stabgebilde erhalten kann. Soll der untere Teil gerade soviel Seitenflächen besitzen, wie der obere, so wird man vielfach denselben zweckmäßig als eine Scheibenkuppel ausbilden, um so die gute Lagerung zu erhalten. Ein Beispiel hierfür bietet Abb. 193, bei dem wieder im Laternengeschoß nur drei Diagonalen vorhanden sind.

164. Gewöhnlich betrachtet man bei Kuppeln mit Zeltdach den oberen Teil als eine Nebenkonstruktion, während die offene Kuppel für sich den Hauptteil darstellt und als System für sich angesehen wird. Dieser Teil wird dann auch als offenes System gelagert und berechnet. Will man die Systeme als Ganzes und demgemäß als geschlossene Gebilde auffassen, so bieten die allgemeinen Verfahren die Möglichkeit, die Spannungen zu ermitteln, so z. B. die Methode der Stabvertauschung. Bei Berechnung der zuletzt betrachteten Systeme ist nur das Laternen- und Zeltgeschoß von neuem Interesse, das ein richtig gestütztes Zeltdach vorstellt, während der untere Teil für sich eine statisch bestimmte offene Kuppel ist. Die senkrechten Stützungsstäbe sind in allen Ringpunkten vorhanden, schiefe dagegen nur in drei Punkten. In den Punkten, wo die schiefen Stäbe fehlen, also in b, d, k bei Abb. 193, werden zweckmäßig die Ersatzstäbe eingeführt, am besten horizontal in Richtung des benachbarten Ringstabes, während $(n-3)$ der oberen Stäbe (im vorliegenden Beispiel drei) mit den Spannungen X, Y, Z entfernt werden. In dem so erhaltenen System kann man die Spannungen

$$S_i^0, \quad S_i', \quad S_i'', \quad S_i'''$$

infolge der äußeren Belastung und infolge

$$X=1, \quad Y=1, \quad Z=1$$

leicht finden, indem man von O ausgeht, dann die Ringpunkte $a, b, c \cdots$ betrachtet; die Punkte b, d, k liefern die Spannungen der Ersatzstäbe infolge der verschiedenen Kräfte, also:

$$S_e^0, \quad S_e', \quad S_e'', \quad S_e'''.$$

Diese dienen in bekannter Weise — wie dies z. B. in § 15 für ein fünfseitiges Zeltsystem durchgeführt wurde — zur Ermittlung der in den Tauschstäben wirklich auftretenden Spannungen X, Y, Z, da die drei Gleichungen bestehen:

$$0 = S_{e_1}{}^0 + X \cdot S_{e_1}{}' + Y \cdot S_{e_1}{}'' + Z \cdot S_{e_1}{}''',$$
$$0 = S_{e_2}{}^0 + X \cdot S_{e_2}{}' + Y \cdot S_{e_2}{}'' + Z \cdot S_{e_2}{}''',$$
$$0 = S_{e_3}{}^0 + X \cdot S_{e_3}{}' + Y \cdot S_{e_3}{}'' + Z \cdot S_{e_3}{}'''.$$

Daß diese drei Bedingungen mittels der Knotenpunkte b, d, k auch ohne Einführung der Ersatzstäbe aufgestellt werden können, ist selbstverständlich.

In ganz entsprechender Weise kann man die Methode der Stabvertauschung benützen, um die Spannungen eines Systems mit Zeltdach zu finden, bei dem $(n - 3)$ untere Kurvenlager durch Kugellager ersetzt sind (Abb. 194). Störende Stäbe gegenüber der gewöhnlichen Scheibenkuppel sind drei nach der Spitze laufende Stäbe. Die Spannungen derselben seien X, Y, Z. Nimmt man dieselben fort und führt dafür in n, p, r (Abb. 195) je einen schiefen oder wagrechten Stützungsstab in der Stützenebene als Ersatzstab ein, so gewinnt man die gewöhnliche Scheibenkuppel, an die oben ein Punkt O durch drei Stäbe

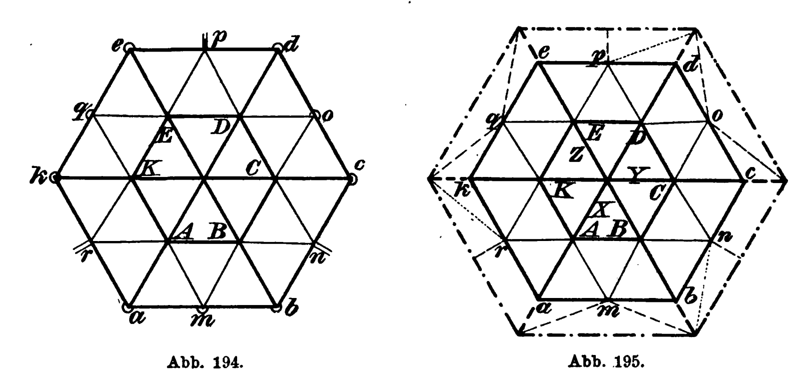


Abb. 194. Abb. 195.

angeschlossen ist, also ein System, dessen Spannungen nach früherem berechnet werden können. Man erhält demgemäß ohne Schwierigkeit alle Spannungen ausgedrückt durch die

äußere Belastung, sowie die Kräfte X, Y, Z, und kann dann aus den drei Bedingungen, daß in den Ersatzstäben die Spannung Null auftritt, oder direkt mittels der Knotenpunkte n, p, r die unbekannten Größen X, Y, Z ermitteln.

Nach letzterem Verfahren ist zu bedenken, daß an diesen Punkten die Resultante der äußeren Kraft und der Spannungen der vier zusammentreffenden Stäbe, z. B. Bn, Cn, bn, cn, in die Richtung des senkrechten Stützungsstabes $(n\nu)$ fallen muß, also senkrecht dazu, d. h. in wagrechter Richtung, die Summe der Komponenten aller Kräfte verschwinden muß. Faßt man demgemäß z. B. die infolge der äußeren Belastung auftretenden Spannungen in den bei n zusammenlaufenden Stäben zu einer Resultante R_0 zusammen, die durch $X = 1$ hervorgerufenen zu R_x, entsprechend die infolge $Y = 1$ und $Z = 1$ auftretenden zu R_y, R_z, und bilden R_0, R_x, R_y, R_z mit der gewählten wagrechten Richtung die Winkel α, β, γ, δ, so hat man die Gleichung:

$$+ R_0 \cdot \cos\alpha + X \cdot R_x \cdot \cos\beta + Y \cdot R_y \cdot \cos\gamma + Z \cdot R_z \cdot \cos\delta = 0.$$

Entsprechende Gleichungen gelten für die Punkte p und r.

165. Von weiterem Eingehen auf geschlossene Kuppeln kann abgesehen werden, da — wie erwähnt — der obere Teil doch gewöhnlich als Nebenkonstruktion betrachtet wird, und andrerseits die Herstellung beliebiger Kuppeln durch den allgemeinen Satz erledigt ist: man überzieht die gegebene Dachfläche in zweckmäßiger Weise mit einem dreieckigen Stabnetz und lagert das System auf $(n + 3)$ Stützungsstäben. In vielen Fällen wird dann noch eine Stabvertauschung zwischen Kuppel- und Stützungsstäben günstig sein. Die Berechnung wird man, wenn angängig, nach der Momentenmethode, anderenfalls nach derjenigen der Stabvertauschung oder Knotenpunktsbedingungen durchführen.

Zimmermann hat in seinem Buch[1]) eine besondere geschlossene Kuppel angeführt, die durch Spezialisierung der

---

[1]) Über Raumfachwerke, Berlin 1901.

allgemeinen Zimmermannschen Kuppel entsteht: das sogenannte Firstfachwerk. Da für die Zimmermannsche Kuppel bereits allgemeine Formeln bestehen, können diese auch mit Vorteil für das Firstfachwerk verwendet werden. Ein ganz ähnliches System kann man natürlich nach Art der Scheibenkuppel erhalten.

§ 43. Räumliche Dachsysteme. Föppls Flechtwerksdächer.

166. Der Vorteil des durch den oft erwähnten allgemeinen Satz gegebenen Grundgedankens zur Herstellung von zweckmäßig gebauten Kuppelsystemen soll noch an einigen allgemeineren Dachfachwerken gezeigt werden, besonders solchen über beliebig rechteckigem Raum. Verlangt wird, daß alle Stäbe nur auf dem Mantel liegen, und daß die Auflagerung derart beschaffen ist, daß keine Mauer auf Umkippen beansprucht wird. Zur Gewinnung des gewünschten Systems[1]) verwendet man den Gedanken, der zur Herstellung der mehrgeschossigen Scheibenkuppel benutzt wurde: man bildet einzelne Ringe parallel dem Auflagerring und fügt zwischen diese in zweckentsprechender Weise Dreiecke ein, so daß man einzelne ebene Felder mit Dreiecksteilung erhält (Abb. 196). Zu beachten ist hierbei, daß aufeinanderfolgende Felder nicht in derselben Ebene liegen dürfen.[2])

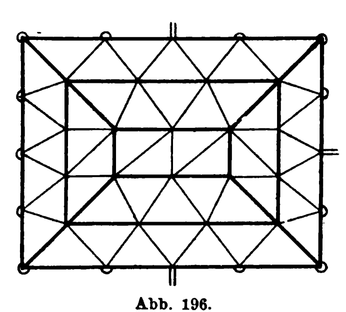


Abb. 196.

Da das System einen geschlossenen Flechtwerksteil darstellt, bedarf es zu seiner stabilen Lagerung $(n + 3)$ Stützungsstäbe, oder also, falls es in allen Ringpunkten beweglich gestützt

[1]) Schlink, Ztschr. f. Arch. u. Ingw. 1904, S. 183. — Vhdl d. V. f. Gewerbefl. 1904, S. 181.

[2]) Selbstverständlich können auch die verschiedenen Feldstäbe abwechselnd schief und senkrecht zu den Lagerringen gerichtet sein (Abb. 198).

werden soll, drei Kurvenlager und $(n-3)$ Kugellager. Die drei Rollenlager dürfen natürlich nicht parallele Gleitrichtungen haben, denn sonst entstände sogar ein System mit endlicher Beweglichkeit.

In einem in dieser Weise gestützten System kann nun eine Stabvertauschung in der Art ausgeführt werden, daß ein Fachwerksstab entfernt wird und dafür an die Stelle eines Kugellagers ein Rollenlager tritt (Abb. 197). Ein derartiges System ist sicher stabil, denn aus dem obersten Scheibenfeld folgt sofort, daß beim Fehlen der äußeren Kräfte in den Stäben des oberen Feldes keine Spannungen auftreten: an A ist ja die Kraft Null zu spalten in Richtung AB und die benachbarte Ebene, also herrscht in AB keine Spannung; dann ist an B wiederum die Kraft Null zu zerlegen in BE und das anstoßende Feld, woraus sich auch in BE der Wert Null ergibt, entsprechend in CD und DF. Dasselbe würde für eine weitere Reihe von Stäben in dem horizontalen Felde ebenfalls gelten. Nachdem dies bekannt ist, kann man zur weiteren Untersuchung die verschiedenen Schnitte legen, wie dies auch bei mehrgeschossigen Scheibenkuppeln geschah, und findet damit, daß beim Fehlen von äußeren Kräften in allen Stäben eindeutig die Spannung Null herrscht, womit die Stabilität bewiesen ist.

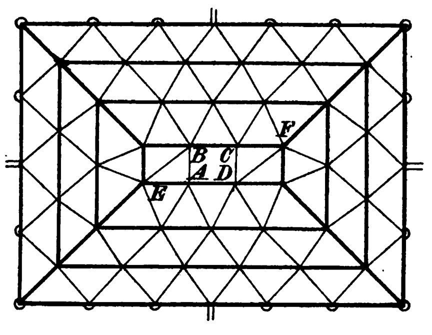


Abb. 197.

Bei Ausführung weiterer Stabvertauschungen ist mit einer gewissen Vorsicht vorzugehen; man darf z. B. in keinem Felde zwei Stäbe fortnehmen. Würde etwa in Abb. 197 außer dem Stab AC noch DF entfernt, so würde sich sofort für CD eine mehrdeutige Spannung ergeben, je nachdem man dieselbe ermittelt an Punkt D (durch Zerlegung der äußeren Kraft in Richtung DC und das anstoßende Feld) oder an Punkt C.

Bei vieldeutiger Spannung ist aber die Stabilität nicht mehr vorhanden.

167. Der wesentliche Unterschied dieser Dachsysteme gegenüber den Kuppeln ist der, daß bei den letzteren die Knotenpunkte des oberen Rings auch alle wirkliche Eckpunkte sind, also zwei nebeneinanderliegende Seiten einen von 180° verschiedenen Winkel bilden, während hier eine Reihe von aufeinanderfolgenden Seiten in dieselbe Gerade fällt. Bei den Kuppelgebilden durften deshalb alle Stäbe innerhalb des Oberrings fehlen, hier dagegen nicht; es darf, wie oben betont, nur einer der Zwischenstäbe entfernt werden. Aber natürlich darf in jedem Felde ein solcher fehlen.

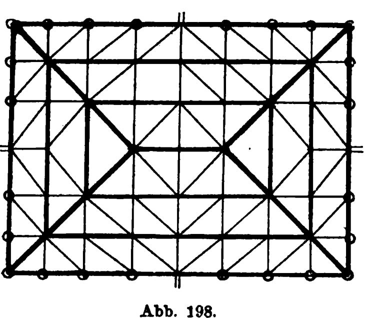


Abb. 198.

Durch zweckmäßige Änderung des Kuppelmantels kann man die verschiedenartigsten Dachfachwerke herstellen, die sich jeder architektonischen Form anpassen. Soll etwa ein größeres Dach mit einer First als räumliche Konstruktion ausgeführt werden, so kann dies nach Abb. 198 geschehen. Bei demselben fehlt ein Mantelstab, infolgedessen sind vier Rollen- und $(n-4)$ Kugellager vorhanden.

Alle diese Systeme haben die vorteilhaften Eigentümlichkeiten: senkrecht zur Mauerflucht treten keine Auflagerkräfte auf und die in Richtung der Mauer fallende Reaktion greift nicht an einem Eck an; innerhalb des Mantels befinden sich überhaupt keine Stäbe, so daß der Dachraum völlig ausgenützt werden kann; die Gestalt des Unterrings weicht von derjenigen des zu überdeckenden Raumes nicht ab, und zwischen den Eckpunkten werden in den verschiedenen Ringen soviel Knotenpunkte angeordnet, wie es gerade mit Rücksicht auf das Stabsystem und die Bedeckung zweckdienlich erscheint.

Man erkennt den wesentlichen Unterschied gegenüber der

allgemein üblichen Konstruktion, bei der einzelne Binder als ebene Fachwerke aufgestellt und durch entsprechende Längsverstrebungen miteinander verbunden werden. Bei dieser Ausführung ragen teilweise die Stäbe recht tief in den Dachraum hinein, und durch die auf einer Seite nötigen festen Auflager wird ein bedeutendes Umkippmoment auf die betreffende Mauer ausgeübt.

168. Über die Berechnung dieser verschiedenen Raumsysteme braucht nicht viel hinzugefügt zu werden. Man bestimmt zunächst die Spannungen in den Stäben des oberen Feldes; in Abb. 197 z. B. zerlegt man die in A wirkende Kraft in Richtung AB und die benachbarte Ebene, dann die Resultante von P_B und BA in Richtung BE und das bei B anstoßende Feld. Entsprechend geht man bei C und D vor. Damit kennt man die Kräfte, die an den Knotenpunkten des oberen Rings wirken, und es liegt dann noch ein System vor, das geradeso gebaut ist, wie eine Scheibenkuppel. Man kann demgemäß zur weiteren Berechnung (die allerdings zeitraubend ist) genau so verfahren, wie dies bei den Kuppeln geschah, indem man entweder die rein zeichnerische Methode anwendet, wobei man die beiden Lastensysteme an Haupt- und Nebenpunkten übereinander zu fügen hat, oder die rein rechnerische, die ebenfalls für eine beliebige Belastung die Spannungsermittlung ermöglicht.

169. Die bisher betrachteten Dachfachwerke sind hervorgegangen aus den allgemeinen Grundgedanken über geschlossene Kuppeln. Dieselben sind ähnlich, aber in mancher Beziehung doch verschieden den von Föppl schon vor längerer Zeit gefundenen „Flechtwerksdächern", die auch Raumsysteme sind und nur Stäbe in der Mantelfläche besitzen.[1])

Föppl gelangt zu denselben auf folgendem Wege: Durch ein Tonnenflechtwerk (Abb. 199) wird ein Längenschnitt gelegt, der die Stäbe zweier Mantelflächen und solche der beiden

[1]) D. Fachw. i. R., S. 100. — Über die Konstruktion weitgespannter Hallendächer, Civ.-Ing. 1894, S. 465.

Grundflächen trifft. Der obere Teil wird nun mittels der geschnittenen Stäbe statt mit dem unteren Stück mit der festen Erde verbunden. Man erhält auf diese Weise sicher ein starres System, da ja bereits durch Verbindung des oberen und unteren Teils, der an und für sich nicht stabil ist, ein starres Gebilde (ein Flechtwerk) entstand; man erkennt aber auch sofort, daß das so gewonnene erweiterte System (oberer Flechtwerksteil + starre Erde) zuviel Stäbe besitzt, da ja das starre Erdfachwerk mehr Stäbe hat (indem in der Grundfläche Diagonalen einzuziehen sind), als der fortgenommene untere Flechtwerksteil. Der erhaltene Fachwerksträger ist also statisch unbestimmt; um ihn bestimmt zu machen, ist eine Reihe von Stäben zu entfernen.

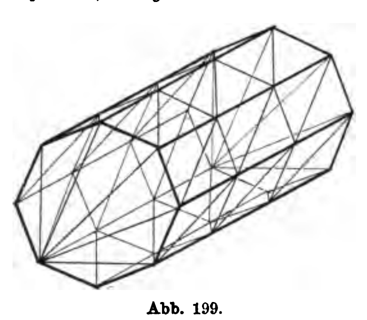


Abb. 199.

Die wirklich nötige Anzahl der Lager bei Beibehaltung aller Mantelstäbe könnte man nun direkt erhalten mittels des allgemeinen Satzes über geschlossene Kuppeln, da der zu stützende Mantel einen geschlossenen Flechtwerksteil darstellt, und hätte demgemäß zur stabilen Stützung $(n + 3)$ Auflagerstäbe notwendig, wenn n die Gesamtzahl aller unteren Knotenpunkte ist, also derjenigen auf Längs- und Stirnseiten. Nimmt man im Mantel einen Stab fort, so wäre das Gebilde zu stützen auf vier Rollen- und $(n - 4)$ Ebenenlagern, die etwa nach Abb. 200 (Grundriß) angeordnet werden können.

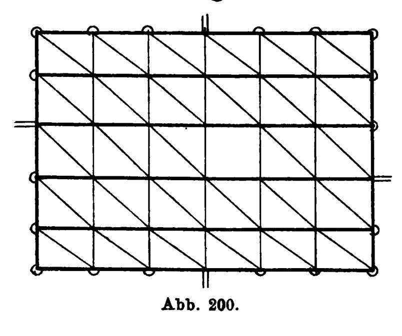


Abb. 200.

Föppl geht nun zur Gewinnung der statischen Bestimmtheit in anderer Weise bei seinen Tonnenflechtwerksdächern vor: er entfernt bei Beibehaltung auch fester Lager einfach in den beiden unteren Ebenenfeldern des Systems die Diagonalen, so daß

sein Flechtwerksdach in der einfachsten Gestalt durch Abb. 201 dargestellt ist.[1]) Allerdings ist er hierzu nur berechtigt, wenn das Mauerwerk den durch die unteren Sparrenstäbe, die im allgemeinen schräg gestellt sind, übertragenen Schub auch aushalten kann. Ist dies nicht möglich, so sind auch die unteren Felder

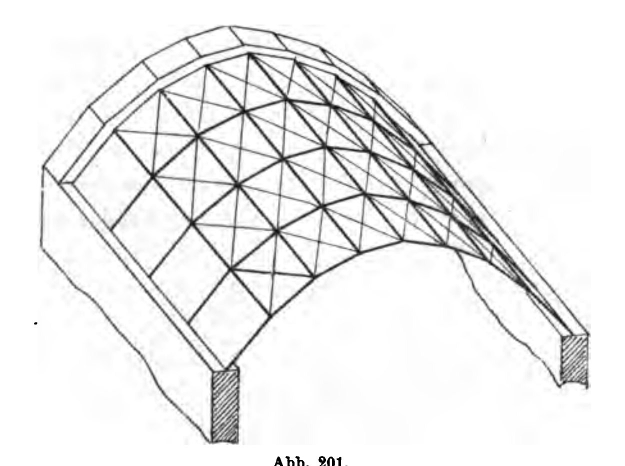


Abb. 201.

als vollständige ebene Fachwerke auszubilden, und es liegt ein statisch unbestimmtes System vor. Diese Unbestimmtheit erstreckt sich jedoch nur auf jedes unterste Feld, weil sich die Spannungen desselben nicht in die oberen Felder fortpflanzen.

Das so erhaltene Tonnenflechtwerksdach kann man auffassen als ein System von einzelnen ebenen Bindern in geneigter Lage, von denen je zwei benachbarte eine gemeinsame Gurtung besitzen und die nur auf den Stirnmauern gelagert sind, auf der einen Seite fest, auf der anderen Stirnmauer beweglich; hierdurch entstehen dann nur auf den Stirnmauern Lagerkräfte. Das Tonnenflechtwerksdach stellt also ein Längsbinderdach dar, bei dem aber jetzt die einzelnen

---

[1]) Diese Figur ist Föppls „Fachwerk im Raume" entnommen; das System ist auch nach vorn bis zur Stirnmauer verlängert zu denken. Die Gegendiagonalen stören nicht, da je zwei einen steifen Stab ersetzen.

Längsbinder (ebene Parallelfachwerke in Längsrichtung) nicht lotrecht stehen, sondern in den Ebenen des Mantels liegen.

Durch diese Auffassung ist denn auch die Berechnung sofort gegeben: Man zerlegt in jedem Knotenpunkt die angreifende Last in eine Komponente in Richtung des Ring-(Pfetten)stabs und in zwei Komponenten in die benachbarten Ebenen, die senkrecht zur Pfette stehen, und betrachtet nun jede Feldebene für sich als einen ebenen Träger auf zwei Stützen, auf den die betreffenden Komponenten wirken. Die Gurtung gehört jedesmal zwei Trägern an: einem oberen Feld als Untergurt und dem unteren als Obergurt; man muß demgemäß für diese Stäbe die vom oberen und unteren Träger erhaltenen

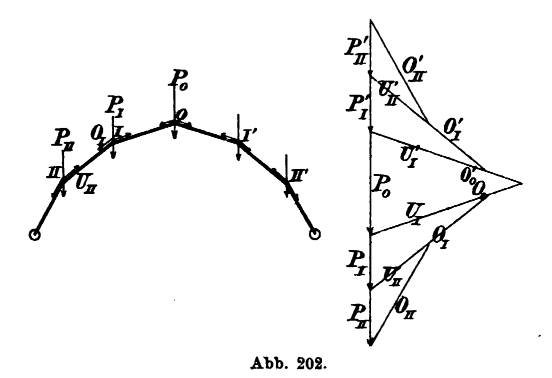


Abb. 202.

Spannungen algebraisch addieren. In Abb. 202 — in der lotrechte Kräfte zu Grunde gelegt sind — sind die mit O und U bezeichneten Werte die Kräfte, die auf die ebenen Fachwerksbalken einwirken. Jeder mittlere Gurt, z. B. I, erhält durch das oben angrenzende Feld Zug-, durch das unten anstoßende Feld Druckspannungen, so daß in Wirklichkeit ein ziemlicher Ausgleich der Spannungen eintritt. Ähnlich liegen die Verhältnisse auch für die Füllungsstäbe, doch können sich nicht alle Stabkräfte vollständig gegeneinander ausgleichen.

Ist nur eine der Längsrichtung des Daches nach gleichförmige Belastung vorhanden, so läßt sich das Sparrenpolygon nach einem Seilpolygon für die an den einzelnen Knotenpunkten

angreifenden Lasten gestalten; dann erhalten die Sparren die Spannungen der Seilseiten, während die Pfetten und Diagonalen spannungslos bleiben. Eine Ausnahme bilden dabei die untersten Träger, sofern die Seitenmauern gegen Schub nicht widerstandsfähig sind, indem sie die Kräfte nach den Stirnmauern leiten.

Föppl weist nun darauf hin, daß es sich nicht immer empfiehlt, das Sparrenpolygon mit dem Seilpolygon zusammenfallen zu lassen, daß vielmehr eine andere Form (wie auch schon in Abb. 202 angenommen) von Vorteil sein kann. Man kann nämlich alsdann bewirken, daß durch die ständige Last Spannungen in das System kommen, die von entgegengesetztem Vorzeichen sind, als diejenigen, die durch Winddruck hervorgerufen werden, wodurch letzterer nicht mehr so ungünstig wirkt.

Da aufeinanderfolgende Seitenflächen nur wenig gegeneinander geneigt sind, sind die auf dieselben wirkenden (durch Zerlegung von P gewonnenen) Kräfte recht groß und demgemäß auch die Spannungen bedeutend. Aber trotzdem ist die Tragfähigkeit dieser Systeme eine größere, als es hiernach zunächst scheint, da bei gleichförmiger oder doch annähernd gleichförmiger Belastung jeder Gurt gleichzeitig Druck (als Obergurt des einen Feldes) und Zug (als Untergurt des benachbarten Feldes) erhält, und bei unregelmäßiger Last die Steifigkeit der Sparren und Ringstäbe günstig einwirkt. Denn bei isolierter Last eines einzelnen Gurts übertragen die an den Knoten fest angeschlossenen Sparrenstäbe infolge der geringen elastischen Senkung dieses Gurts sofort einen Teil der Last auf die beiden Nachbargurte. Es tritt hierdurch einerseits eine direkte Entlastung des betreffenden Gurts ein, andrerseits auch eine teilweise Neutralisierung der doch erhaltenen Gurtspannung dadurch, daß der Gurt durch die entstandene Belastung der Nachbargurte auch eine Beanspruchung und zwar eine entgegengesetzte erfährt.

Föppl zeigte z. B.[1] an einem Modell eines solchen Flecht-

---

[1]) Mitteilung des Münch. mech.-techn. Labor., Heft 24, 1896. — D. graph. Statik, 2. Aufl., S. 307.

werksdaches, das über einem kleinen Raum am Münchener mechanisch-technischen Laboratorium angebracht ist, daß die Einsenkung, die der in der Mitte der Firstpfette gelegene Knotenpunkt unter einer an ihm angebrachten Einzellast erfuhr, nur etwa 17% von jener betrug, die nach der Rechnung bei Vernachlässigung der Biegungssteifigkeit der Flechtwerksstäbe zu erwarten gewesen wäre. Mit Rücksicht auf diese günstigen Verhältnisse macht Föppl für die ungünstigste Belastung besondere Annahmen.

Die für ein Flechtwerksdach ungünstigste Belastung ist übrigens wesentlich verschieden von derjenigen, die in den gewöhnlichen Bogenträgern eines Binderdaches die größten Spannungen hervorruft; es kommt nämlich bei ersterem nur auf die Belastungsunterschiede unmittelbar benachbarter Knotenpunkte an. Schon dadurch entsteht für das Flechtwerksdach ein Vorzug. Allerdings bereitet die genaue Berechnung solcher räumlichen Dachsysteme wesentlich mehr Arbeit.

170. Wie man die Querschnittsform eines solchen Flechtwerksdaches wählt, ist natürlich ganz willkürlich. Man kann z. B. dem äußeren Mantel die Form von Sägedächern geben, wie dies tatsächlich von Löhle in Zürich geschehen ist.[1]) Man erhält auf diese Weise ein System, das im Rauminneren frei von den üblichen Unterstützungen bleibt. Die Berechnung kann genau so ausgeführt werden, wie bei den gewöhnlichen Tonnenflechtwerksdächern.

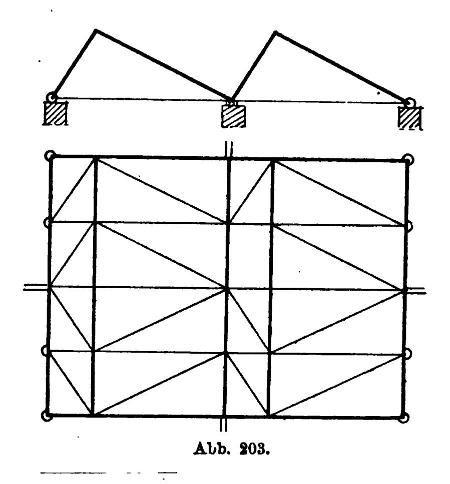


Abb. 203.

Eine günstigere Stützung kann man auch erreichen, wenn man in den Stirnseiten (und nur da!) Stäbe einzieht, so daß lauter Dreiecke entstehen

[1]) Föppl, D. graph. Statik, 2. Aufl., S. 309.

(Abb. 203). Daß ein solches System stabil ist, ergibt sich daraus, daß der Mantel wiederum einen Flechtwerksteil darstellt, der in $(n+3)$ Stützungsstäben, bezw. wenn im Mantel ein Stab entfernt wird, in $(n+4)$ Lagerbedingungen aufruhen muß.

171. Selbstverständlich kann man auch bei den Föpplschen Flechtwerksdächern umgehen, die Stirnmauern bis zum Dachprofil zu führen, indem man in anderer Weise für sichere Unterstützung der Eckpunkte der Stirnöffnung sorgt. Ebenso kann man auch bei den unter Nr. 166 erwähnten Dachsystemen die vordere und hintere Systembegrenzung lotrecht anordnen, indem man (Abb. 204) in den Stirnen die Unterringpunkte durch einen Stab verbindet und in das so entstandene Polygon $(\nu - 3)$ Diagonalen einzieht, wenn ν die Eckzahl dieses Vielecks bedeutet. Man darf hierbei nicht die Diagonalen nach einem Zwischenpunkt M ziehen, sofern man diesen auf einem Kugellager oder Rollenlager mit Gleitrichtung senkrecht zur Mauer lagern will. Denn, ersetzt man dies Lager durch Stützungsstäbe, so erkennt man sofort, daß M durch lauter Stäbe in derselben Ebene

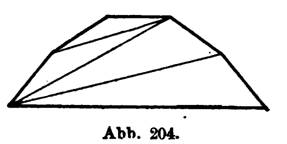


Abb. 204.

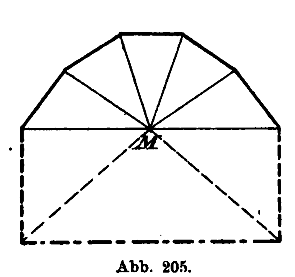


Abb. 205.

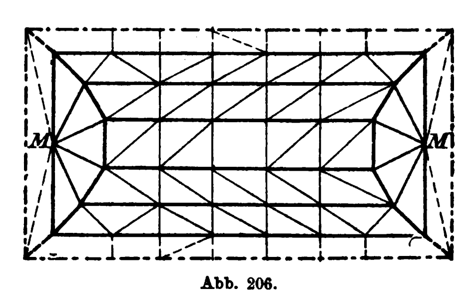


Abb. 206.

angeschlossen ist (Abb. 205). Liegt M dagegen nicht in derselben Ebene wie die Polygonseiten (Abb. 206), so ist die angegebene Lagerung möglich.[1])

[1]) Schlink, Ztschr. f. Arch. u. Ingw. 1904, S. 181.

Nachtrag.

172. Die meisten Stabilitätsuntersuchungen dieses Werks beruhten auf dem Hennebergschen Zusatz zu Föppls Satz, daß ein System mit der richtigen Stabzahl stabil ist, sofern bei irgend einer Belastung in allen Stäben eindeutige und endliche Spannungen auftreten. Gelegentlich eines Vortrags, den ich auf der Naturforscherversammlung in Stuttgart hielt, wurde mir bekannt, daß die technischen Kreise nicht einmütig von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt sind. So wurde unter anderem ausgeführt, daß labile Systeme bei speziellen Belastungen und Anwendung von bestimmten Methoden doch eindeutige Spannungen ergeben könnten; es wurde im Zusammenhang damit deswegen auch die Ansicht ausgesprochen, die Unbeweglichkeit eines Systems sei auf kinematischem Wege zu prüfen. Es möge zur Klarstellung dieser Frage hier eine Ergänzung zu den Ausführungen in Nr. 11 bezw. 38 Platz finden.

Der vorn angegebene Beweis beruhte auf einem System (7) von n Gleichungen mit n Unbekannten, die derartig gebaut waren, daß auf der rechten Seite als absolute Glieder nur die äußeren Lasten standen, auf der linken Seite dagegen als Koeffizienten der Unbekannten solche Größen (cos und sin), die nur von der Form des Systems abhingen, also jedenfalls ganz unabhängig von der äußeren Belastung waren. Jede Unbekannte S_i konnte nach der Theorie der Gleichungen in der Form ausgedrückt werden:

$$S_i = \frac{D_i}{D},$$

wobei also der Nenner nur von der Form des Systems abhängig ist. Da in D die äußeren Lasten nicht auftreten, von dem Verschwinden von D aber der vieldeutige bezw. unendlichgroße Wert abhängt, wurde hieraus geschlossen, daß das Auftreten von vieldeutigen oder unendlichgroßen Spannungswerten von der äußeren Last unabhängig ist.

Nun gibt es allerdings Systeme von Gleichungen, für die, trotzdem die Determinante verschwindet, doch alle Unbekannten endliche und eindeutige Werte erhalten; dieses ist der Fall, wenn in dem Ausdruck für jede Unbekannte:

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

in D_i und D ein gemeinsamer Faktor K enthalten ist, der gerade das Nullwerden von D und D_i bedingt:

$$D_i = A_i \cdot K,$$
$$D = B \cdot K;$$

diesen gemeinsamen Faktor kann man wegheben und erhält in der Tat für jedes x_i einen eindeutigen, endlichen Wert:

$$x_i = \frac{D_i}{D} = \frac{A_i}{B}.$$

Derartige Bauweise für alle Unbekannten x_i kann eintreten, wenn in den Koeffizienten der Unbekannten, bezw. den absoluten Gliedern, variabele Größen enthalten, dieselben Funktionen einer bestimmten Größe sind.

Als Beispiel mögen folgende beide Gleichungen gelten:

$$(4t + 1)\,x_1 + (t^3 + 3)\,x_2 = t^3 + 4,$$
$$(2t^2 + 2)\,x_1 + (t^3 + 6)\,x_2 = 2t + 8.$$

Setzt man in diesen sofort $t = 0$ und versucht x_1 und x_2 auszurechnen, so erkennt man, daß x_1 und x_2 vieldeutige Werte haben, da ja beide Gleichungen übereinstimmen, die zweite gar keine neue Gleichung darstellt. Führt man dagegen die Rechnung bei Beibehaltung der Größe t durch und setzt erst nachträglich $t = 0$, so ergeben sich für beide Unbekannte eindeutige endliche Werte. Es ist ja nun:

$$D = -2t^5 + 4t^4 - t^3 - 6t^2 + 24t$$
$$= t \cdot \{-2t^4 + 4t^3 - t^2 - 6t + 24\}$$
$$D_1 = t^6 - 2t^4 + 2t^3 - 6t$$
$$= t \cdot \{t^5 - 2t^3 + 2t^2 - 6\},$$
$$-D_2 = 2t^5 + 2t^3 - 34t$$
$$= t \cdot \{2t^4 + 2t^2 - 34\},$$

also:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{t \cdot \{t^5 - 2t^3 + 2t^2 - 6\}}{t \cdot \{-2t^4 + 4t^3 - t^2 - 6t + 24\}},$$
$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-t \cdot \{2t^4 + 2t^2 - 34\}}{t \cdot \{-2t^4 + 4t^3 - t^2 - 6t + 24\}}.$$

Dividiert man in beiden Ausdrücken Zähler und Nenner durch t und setzt alsdann:

$$t = 0,$$

so findet sich jetzt:

$$x_1 = -\frac{1}{4}, \quad x_2 = +\frac{17}{12}.$$

Daß bei dieser Rechnungsart für die Unbekannten x_1, x_2 eindeutige, endliche Werte gefunden werden, liegt daran, daß jetzt zur Erlangung spezieller Werte unter den unendlich vielen, die in:

$$x_1 = \frac{0}{0}, \quad x_2 = \frac{0}{0}$$

enthalten sind, von allgemeineren Gleichungen ausgegangen und ein bestimmter Grenzübergang vorgenommen wurde.

Und das ist ja auch einleuchtend, daß die allgemeinen Werte

$$\frac{0}{0}$$

mittels eines bestimmten Grenzübergangs eindeutige Werte liefern können. Das ist ein bekannter grundlegender Satz der Mathematik, der sich bei den verschiedensten Beispielen zeigen läßt. Hat man z. B. zwei Punkte A, B und zieht man einerseits die Linie von A nach B, andrerseits die Linie von B nach A, so ist der Schnittpunkt beider Linien nicht festgelegt, jeder Punkt der zusammenfallenden Linien 1 und 2 kann als Schnitt-

punkt gelten. Faßt man aber die Linien 1, 2 als Grenzlagen zweier allgemeinen Strahlen auf, so liegt der Schnittpunkt fest, hängt jedoch ganz von der Art des gewählten Grenzübergangs ab. Man kann z. B. ausgehen von zwei Strahlen I, II, die mit der Richtung AB gleiche Winkel α bilden und den Schnittpunkt C liefern, und nun verschiedene Strahlen wählen, die immer die gleichen Winkel $\alpha_1, \alpha_2 \cdots$ mit AB einschließen. Es bewegt sich also C auf einer Geraden, die senkrecht zu AB steht und diese in der Mitte schneidet; läßt man nun allmählich den Winkel α gleich Null werden, so ist der Schnittpunkt der Linien 1 und 2 bestimmt durch den Punkt M, als Schnittpunkt der Linie AB mit CC'. Wäre man von Strahlen ausgegangen, die nicht gleiche Winkel mit AB einschließen, und hätte nun in sachgemäßer Weise einen Grenzübergang ausgeführt, so hätte sich statt des Punktes M ein anderer Punkt auf AB als Schnittpunkt von 1 und 2 ergeben.

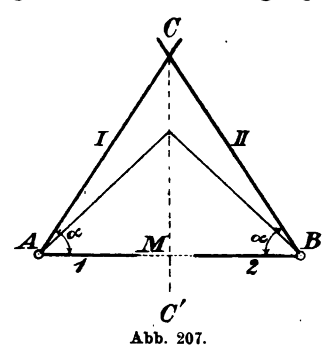


Abb. 207.

Solche Verhältnisse, daß die Koeffizienten und absoluten Glieder in einem Gleichungssystem von einer anderen Größe abhängen, also noch variabel sind, liegen nun bei einem zu untersuchenden Stabsystem nicht vor; denn die rechten Seiten sind festgegebene Werte, nämlich die eingeführten Lasten, und die Koeffizienten der Unbekannten sind durch das gegebene Stabsystem auch festgelegt. Die Sachlage ist so, als ob im vorhergehenden Beispiel zwei bestimmte Strahlen gegeben gewesen wären und die Frage präzis gelautet hätte: liefern sie einen eindeutigen oder vieldeutigen Schnittpunkt? Daß unter dem Einfluß der Kräfte ein labiles System eine andere Form annehmen kann, spielt keine Rolle; das augenblicklich zu betrachtende System ist festgegeben, alle Koordinaten sind bestimmte Werte.

Bei direkter Untersuchung scheint es demgemäß aus-

geschlossen, daß alle Spannungen eines labilen Systems eindeutig und endlich werden. Wenn man aber das labile System als Grenzlage, aus einem stabilen System hervorgegangen, betrachtet, einen Grenzübergang vornimmt, können selbstverständlich bei gewissen Belastungen die vieldeutigen Werte der unbekannten Spannungen einen bestimmten endlichen Wert annehmen.

Als Beispiel zu diesen Ausführungen diene der möglichst einfache Fall eines Fachwerks, nämlich eines gestützten Systems, bei dem ein Punkt durch zwei Stäbe an zwei feste Punkte angeschlossen ist. Liegen die beiden Stäbe in derselben Richtung (Abb. 208), so erzeugt eine in M angreifende Kraft P in diesen vieldeutige Spannungswerte. Andrerseits

Abb. 208.

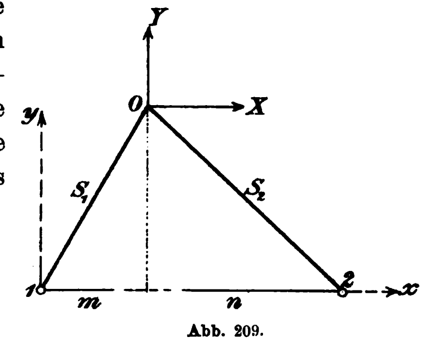


Abb. 209.

bilde man sich dieses labile Stabsystem dadurch, daß man von dem allgemeinen der Abb. 209 ausgeht, bei dem die Stäbe $\overline{1,0}$ und $\overline{2,0}$ verschiedene Richtungen einnehmen. Für dieses letztere hat man die Gleichungen:

$$\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot S_1 + \frac{x_0 - x_2}{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + y_0^2}} \cdot S_2 = X,$$

$$\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cdot S_1 + \frac{y_0 - y_2}{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + y_0^2}} \cdot S_2 = Y.$$

Nun denke man sich den Punkt 0 auf einer beliebigen Richtung, etwa parallel zur y-Achse bewegt, so daß das System 012 immer in ein anderes übergeht, bis schließlich 0 auf die Linie 1, 2 fällt. Bei dieser Bewegung hat Punkt 0 die Koordinaten:

$$x_0 = m,$$

$$y_0 = y,$$

von denen y variabel ist. Für jede Lage des Punktes 0 gilt (wenn die Länge $(x_2 - x_0)$ gleich n gesetzt wird):

$$\frac{m}{\sqrt{m^2 + y^2}} \cdot S_1 - \frac{n}{\sqrt{n^2 + y^2}} \cdot S_2 = X,$$

$$\frac{y}{\sqrt{m^2 + y^2}} \cdot S_1 + \frac{y}{\sqrt{n^2 + y^2}} \cdot S_2 = Y.$$

Um nun das spezielle System Abb. 208 zu erhalten, ist

$$y = 0$$

zu setzen. Führt man diesen Wert direkt in die beiden Gleichungen ein, so ergibt sich:

$$S_1 = \frac{0}{0}, \quad S_2 = \frac{0}{0},$$

bezw. ein unendlich großer Wert; rechnet man dagegen mit dem allgemeinen Wert y weiter, so findet man:

$$\frac{1}{\sqrt{m^2 + y^2}} \cdot S_1 = \frac{\begin{vmatrix} X & -n \\ Y & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & -n \\ y & y \end{vmatrix}} = \frac{+yX + nY}{y(m+n)},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + y^2}} \cdot S_2 = \frac{\begin{vmatrix} m & X \\ y & Y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & -n \\ y & y \end{vmatrix}} = \frac{+Ym - Xy}{(m+n)y};$$

man erhält nun, wenn man jetzt erst

$$y = 0$$

setzt, für S_1 und S_2 der Abb. 208 eindeutige endliche Werte, sofern man die Kraft Y zweckmäßig wählte, z. B. gleich Null einführt:

$$S_1 = X \cdot \frac{m}{m+n},$$

$$S_2 = -X \cdot \frac{n}{m+n}.$$

Man gewinnt also in der Tat bei Ausführung eines Grenzüberganges für dieses System bei bestimmter Belastung eindeutige Werte, obwohl es labil ist. Betrachtet man dagegen den labilen Zustand als die gegebene Form, so dürfte das Auftreten von

eindeutigen und endlichen Spannungen in allen Stäben ausgeschlossen sein, einerlei, wie auch immer die äußere Belastung gewählt wird.

Im Zusammenhang hiermit ist auch leicht ein weiterer Punkt zu erledigen.

Falls auf das in Abb. 210 gezeichnete stabile System derartige Kräfte wirken, daß die an dem einen Dreieck angreifenden im Gleichgewicht stehen, treten in den drei Verbindungsstäben 1, 2, 3 die Spannungen Null auf. Wenn man nun von diesem System mit seiner Belastung zu einem labilen übergeht, indem man den beiden Dreiecken perspektivische Lage gibt, also die drei Verbindungsstäbe durch einen Punkt laufen läßt, wie kommt es da — so lautet eine Einwandsfrage —, daß in den drei Stäben auf einmal mehrdeutige Spannungen auftreten sollen? Da müßte doch irgendwie ein Sprung stattfinden?

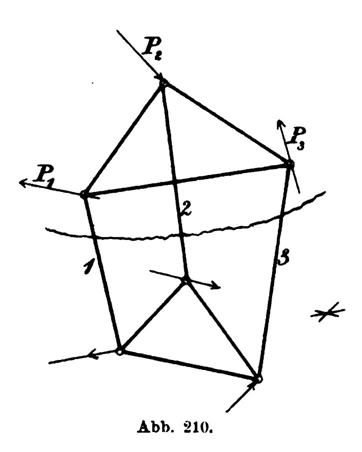


Abb. 210.

Die Antwort ist dadurch gegeben, daß sich in diesem Fall die Stäbe spannungslos finden, indem man einen speziellen Grenzübergang vornahm; infolge desselben erhalten die an und für sich allerdings vieldeutigen Spannungen den speziellen Wert Null. Tatsächlich bewirken jedoch im wirklichen labilen System allgemein die verschiedensten Spannungen Gleichgewicht, oder mit anderen Worten: man kann in einem derartigen System in einem Stabe eine beliebige Spannung einführen, auch praktisch hervorrufen, und bewirkt dadurch in den anderen Stäben Spannungen, ohne daß man äußere Kräfte benötigt; beim stabilen System ist dies dagegen ausgeschlossen.

173. In Nr. 71 wurde ausgesprochen, daß ein unregelmäßiges ebenes Vieleck mit Stützungen in Rollenlagern stabil ist, sofern nicht beim Ring mit gerader Seitenzahl alle Gleitrichtungen den Winkel zwischen den am betreffenden Kurven-

lager zusammenstoßenden Stäben halbieren. Diese Angaben schließen jedoch nicht alle Ausnahmefälle in sich. Man kann dies mittels des Müller-Breslauschen kinematischen Verfahrens, das schon auf S. 180 verwendet wurde, zeigen,[1] oder auf statischem Wege, indem man den Föppl-Hennebergschen Satz benützt.

Man betrachte den Ring als ebenes System und ersetze wieder die Auflager durch Stützungsstäbe, die senkrecht zur Gleitrichtung der Lager verlaufen (Abb. 211). Nach dem Hennebergschen Satz ist das System stabil, wenn beim Fehlen von äußeren Kräften in allen Stäben die Spannung Null

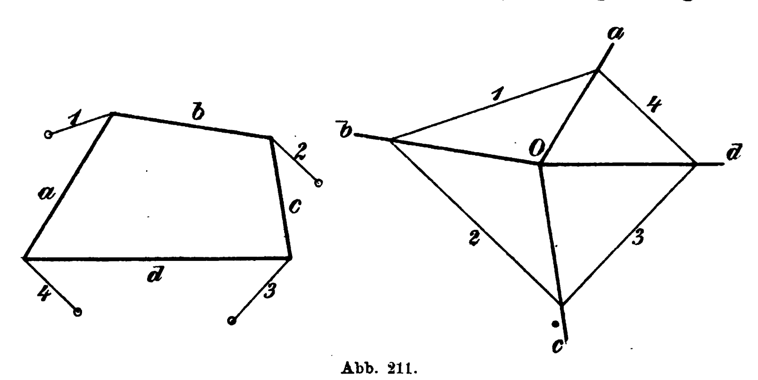


Abb. 211.

eindeutig herrscht, dagegen labil, wenn bei dieser speziellen Belastung von Null verschiedene Spannungen in allen oder einzelnen Stäben auftreten können, also ein von Null verschiedenes Spannungsbild ein mögliches ist.

Wann ist nun letzteres der Fall? Jedenfalls dann, wenn der Linienzug $a, b, c \cdots$ aufgefaßt werden kann als ein Seilpolygon zu im Gleichgewicht stehenden Kräften, die in den Linien $1, 2, 3 \cdots$ (Stützungsstäbe) wirken, wenn also die Parallelen zu $1, 2 \cdots$ bezüglich der durch einen Pol parallel zu $a, b, c \cdots$ gezogenen Strahlen $a, b, c \cdots$ ein geschlossenes Kräftepolygon ergeben, wie dies gerade bei Abb. 211 der Fall ist (211^b). Alsdann kann man ja z. B. mit jedem Kraftwert

[1]) Müller-Breslau, Zentralbl. d. Bauverw. 1892, S. 203.

in Linie 1 ein Kräftepolygon 1, 2 ··· zeichnen, so daß einerseits diese Kräfte für sich im Gleichgewicht stehen, andrerseits jede dieser Kräfte mit den an dem betreffenden Eckpunkt zusammentreffenden Ringstabkräften Gleichgewicht bildet.

Man sieht hieraus, daß man sehr leicht auf ein labiles System kommen kann, indem ja bei einem n-seitigen Ring immer dann ein labiles System gewonnen wird, wenn man bei $(n-1)$ gegebenen Richtungen der Stützungsstäbe (zu denen die Gleitrichtungen der Rollenlager senkrecht stehen) die n. Richtung so wählt, daß sie mit den $(n-1)$ anderen ein geschlossenes Kräftepolygon ergibt, zu dem die Seiten a, b ···

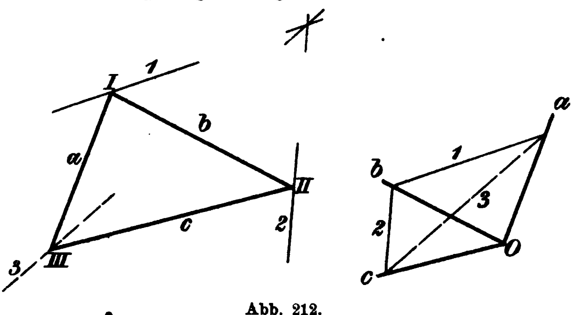
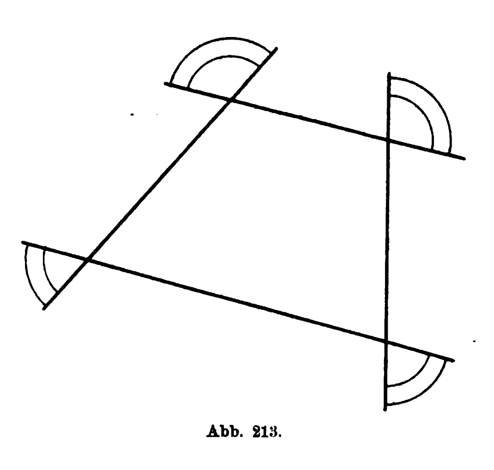


Abb. 212.

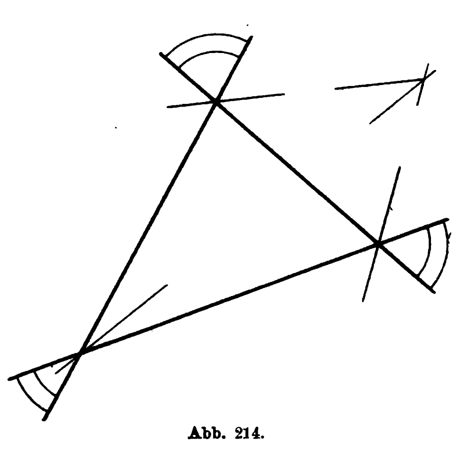
als Seilseiten gehören. Ist z. B. das Dreieck der Abb. 212 gegeben, sowie die Gleitrichtung der Rollenlager in I und II, also auch die Stützungsstäbe 1, 2, so kann man durch Konstruktion eines Kräftepolygons zwischen den Strahlen a, b, c (Abb. 212[b]) leicht die Richtung 3 finden, in die der Stützungsstab 3 nicht fallen darf, wenn ein stabiles Ringsystem vorhanden sein soll. Beim Dreieck findet sich allerdings diese Ausnahmerichtung noch einfacher aus der Bedingung, daß alsdann 3 durch den Schnittpunkt von 1 und 2 zu gehen hat, aber bei einem mehrseitigen Vieleck ist wohl die Untersuchung mit Hilfe von Kräfte- und Seilpolygon die einfachste.[1])

[1]) In etwas anderer Weise machte zur Untersuchung des Auflagerrings F. Jasinski vom Kräfte- und Seilpolygon Gebrauch: Schweiz. Bauztg. 1900, Bd. 35, S. 189, Graphische Methode zur Berechnung des Fußrings räumlicher Fachwerke.

Die Verhältnisse an einem Ring mit gerader und einem solchen mit ungerader Seitenzahl sind (wie kurz bemerkt sei) in einer Hinsicht recht verschieden: bei ersterem lassen sich nämlich zur Herstellung labiler Systeme die Richtungen der Stützungsstäbe so wählen, daß sie alle (Abb. 213) außerhalb der Winkel verlaufen, die an den Eckpunkten durch die Ringseiten gegeben sind. Bei dem Ring mit ungerader Seitenzahl ist dies aber nicht möglich,


Abb. 213.

wie man sofort bei dem Dreieck erkennt: man kann die Linien 1, 2, 3 nicht so wählen, daß sie durch einen Punkt gehen, und gleichzeitig außerhalb der angegebenen Winkelräume verlaufen (Abb. 214).


Abb. 214.

Das dadurch gegebene Resultat ist von Interesse für die Netzwerkkuppeln. Bei deren Stabilitätsprüfung kam es ja auf die Untersuchung eines ebenen Rings an, indem dabei die Linien 1, 2 ⋯ die Schnittlinien je einer Netzwerkebene mit der oberen horizontalen Ebene angaben (S. 212). Die gewöhnliche Netzwerkkuppel verlangt aber, daß diese Schnittlinien außerhalb der Winkel der Ringseiten fallen. Daraus folgt, daß eine Netzwerkkuppel über einem

Grundriß mit ungerader Seitenzahl stets stabil ist, daß dagegen eine solche über einem Vieleck mit gerader Seitenzahl in verschiedenster Weise labil sein kann. Selbstverständlich sind aus praktischen Gründen auch stabile Kuppeln zu vermeiden, die nahezu labil sind, die also infolge äußerer Kräfte sehr große Spannungen erhalten.

Berichtigungen

Auf Seite 272 muß es in Gleichung (81) statt ${}_A D_m + {}_B D_m = \cdots$ heißen: ${}_A D_m - {}_B D_m = \cdots$.

Auf Seite 278 wird in der zweiten Gleichung (88) statt $\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \zeta}}{\operatorname{tg} \zeta}$ bequemer $\frac{1}{\sin \zeta}$ geschrieben.

Literaturverzeichnis.

I. Literatur für das erste Kapitel.

1. Bücher und umfassendere Abhandlungen.

C. Culmann, Graph. Statik, 1. Aufl., Zürich 1866.

A. Föppl, Theorie des Fachwerks, Leipzig 1880.

—, Vorlesungen über technische Mechanik, 2. Bd.: Die graphische Statik, 1. Aufl. Leipzig 1900, 2. Aufl. 1903.

L. Henneberg, Statik der starren Systeme, Darmstadt 1886.

—, Bericht über die Entwicklung und die Hauptaufgaben der Theorie der einfachen Fachwerke, Deutsche Mathem.-Vereinigung 1894 (III), S. 567.

—, Die graphische Statik, Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften IV, 5, Leipzig 1903.

M. Levy, La statique graphique, Paris 1877; 2. Aufl.. Paris 1886—1888.

G. Ch. Mehrtens, Statik der Baukonstruktionen, Bd. I, Leipzig 1903.

A. F. Möbius, Gesammelte Werke, herausgeg. von F. Klein, III. Bd., Leipzig 1886.

O. Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, Berlin 1906.

H. Müller-Breslau, Statik der Baukonstruktionen, 2. Aufl., Bd. I, Leipzig 1887; 3. Aufl., Bd. I, 1901.

—, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, 3. Aufl., Leipzig 1904.

F. Steiner, Theorie der eisernen Brücken; Handbuch der Ingenieurwissenschaften II, Kap. VIII; 3. Aufl., Leipzig 1901.

2. Abhandlungen.

Burmester, Über die Momentanbewegungen ebener kinematischer Ketten, Civiling. 1880.

A. Föppl, Zur Fachwerkstheorie, Schweiz. Bauztg. 1887, Bd. IX, S. 42.

M. Grübler, Allgemeine Eigenschaften der ebenen kinematischen Ketten, Civiling. 1883, S. 167.

M. Grübler, Beitrag zur Theorie des ebenen einfachen Fachwerks, Rigaer Industrieztg. 1887, S. 37, 49.

—, Beiträge zur Theorie ebener Fachwerke, Rigaer Industrieztg. 1888, S. 277.

—, Einige Sätze über das ebene Fachwerk, Rigaer Industrieztg. 1889, S. 88.

L. Henneberg, Die Theorie der statisch bestimmten Fachwerksträger, Ztschr. f. Arch. u. Ing.wesen 1903, S. 157.

—, Über die Bildungsgesetze ebener Fachwerke und deren Anwendung bei der Bestimmung der Spannungen, Ztschr. f. Arch. u. Ing.wesen 1903, S. 567.

R. Land, Die Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen als Grundlage einer allgemeinen Theorie der Einflußlinien aller Trägerarten, sowie einer allgemeinen Theorie der Träger überhaupt, Wochenbl. f. Baukunde 1887.

—, Statische und geometrische Bestimmtheit der Träger, insbesondere der Fachwerksträger, Zentralbl. der Bauverwaltung 1887, S. 363.

—, Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger, Schweiz. Bauztg. 1887, Bd. X, S. 157.

—, Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger, Ztschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Vereins 1888.

—, Zur neuen Theorie der statisch bestimmten Träger, Schweiz. Bauztg. 1888, Bd. XII, S. 22.

—, Das allgemeine Gesetz der Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen, Schweiz. Bauztg. 1888, Bd. XII, S. 66.

G. Lang, Über Berechnung und Konstruktion der Bauten in Eisen, Rigaer Industrieztg. 1886, S. 265; ebenda 1889, S. 73, 85.

—, Zur Entwicklungsgeschichte der Spannwerke des Bauwesens, Rigaer Industrieztg. 1890, S. 85 usw.

O. Mohr, Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerksträger, Ztschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins z. Hannover 1874, S. 223.

—, Beitrag zur Theorie des Fachwerks, Ztschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins z. Hannover 1874, S. 509; ebenda 1875, S. 17.

—, Über die Momentanbewegung ebener kinematischer Ketten, Civiling. 1880, S. 247.

—, Beitrag zur Theorie des Fachwerks, Civiling. 1885, S. 289.

—, Über Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne, Civiling. 1887, S. 631.

—, Theorie der Streckensysteme, Civiling. 1888.

H. Müller-Breslau, Anwendung der geometrischen Bewegungslehre auf die Berechnung ebener Träger, Ztschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins z. Hannover 1880, S. 151.

—, Zur Frage der Kennzeichen statisch bestimmter, stabiler Fachwerke, Schweiz. Bauztg. 1885, Bd. V, S. 19.

H. Müller-Breslau, Beitrag zur Theorie des ebenen Fachwerks, Schweiz. Bauztg. 1887, Bd. IX, S. 121.
—, Beitrag zur Theorie der ebenen Träger, Schweiz. Bauztg. 1887, Bd. X, S. 129.
—, Zur Theorie der ebenen Träger, Schweiz. Bauztg. 1888, Bd. XI, S. 45.
—, Berechnung statisch bestimmter ebener Träger mit Hilfe der geometrischen Bewegungslehre, Ztschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins z. Hannover 1888, S. 191.
—, Über die Bildungsgesetze ebener Fachwerke und deren Anwendung bei der Bestimmung der Spannungen, Ztschr. f. Arch. u. Ing.wesen 1904, S. 33.
W. Schlink, Die Theorie der statisch bestimmten Fachwerksträger, Ztschr. f. Arch. u. Ing.wesen 1903, S. 157.
—, Die Ermittlung der Spannungen eines Fachwerksträgers mittels des erweiterten Systems, Ztschr. f. Arch. u. Ing.wesen 1903, S. 397.

II. Literatur über das räumliche Fachwerk.

1. Bücher und umfassendere Abhandlungen.

J. Bauschinger, Elemente der graphischen Statik, 1. Aufl. München 1871; 2. Aufl. 1880.
C. Culmann, Graphische Statik, 1. Aufl. Zürich 1866; 2. Aufl. 1875.
A. Föppl, Das Fachwerk im Raume, Leipzig 1892.
—, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. II: Die graphische Statik, 1. Aufl. Leipzig 1900; 2. Aufl. 1903.
M. Foerster, Die Eisenkonstruktionen der Ingenieurhochbauten, 2. Aufl. Leipzig 1902; 3. Aufl. 1906 (Kap. XI).
L. Henneberg, Statik der starren Systeme, Darmstadt 1886.
—, Bericht über die Entwicklung und die Hauptaufgaben der Theorie der einfachen Fachwerke; Deutsche Mathem.-Vereinigung 1894.
—, Die graphische Statik, in Enzyklopädie d. mathem. Wissenschaften IV, 5, Leipzig 1903.
Th. Landsberg, Dächer und Dachstuhlkonstruktionen, im Handb. d. Architektur, 3. Teil, II, 4, 2. Aufl., Stuttgart 1901.
—, Statik der Hochbaukonstruktionen, im Handb. d. Arch., 1. Teil, I, 2; 2. Aufl., Darmstadt 1889.
G. Ch. Mehrtens, Statik der Baukonstruktionen, Bd. I, Leipzig 1903.
A. F. Möbius, Gesammelte Werke, herausgeg. v. F. Klein, III. Bd., Leipzig 1886.
O. Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, Berlin 1906.
H. Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, 3. Aufl., Leipzig 1904.

W. Ritter, Das Fachwerk. Zürich 1890.
W. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Aufl., Leipzig 1880.
F. Steiner, Über die graphische Zusammensetzung der Kräfte im Raum. Wien 1876.
—, Theorie der eisernen Brücken, im Handbuch der Ingenieurwissenschaften II, Kap. VIII; 3. Aufl., Leipzig 1901.
H. E. Timerding, Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers, in Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften IV, 1. Teil, 2.
W. Zimmermann, Über Raumfachwerke. Neue Formeln und Berechnungsweisen für Kuppeln und sonstige Dachbauten, Berlin 1901.

2. Abhandlungen.

Berichtigung: In der Anmerkung auf S. 139 muß es statt: Schweiz. Bauztg. 1884 heißen: Schweiz. Bauztg. 1891.

A. Föppl, Über das räumliche Fachwerk, Schweiz. Bauztg. 1881, Bd. XV; 1882, Bd. XVI u. XVII; 1883, Bd. II.
—, Über das räumliche Fachwerk (Netzwerkkuppel), Schweiz. Bauztg. 1888, Bd. XI, S. 115.
—, Über das räumliche Fachwerk (Kuppeln mit Netzwerkfüllung), Schweiz. Bauztg. 1891, Bd. XVII, S. 77.
—, Die Theorie der Raumfachwerke und der Brückeneinsturz bei Münchenstein, Schweiz. Bauztg 1891, Bd. XVIII, S. 15.
—, Über die Eisenkonstruktion der Markthalle zu Leipzig, Civiling. 1891, S. 179.
—, Die Flechtwerksträger (Bericht darüber), Schweiz. Bauztg. 1894 Bd. XXIII, S. 146.
—, Über die Konstruktion weitgespannter Hallendächer, Civiling. 1894, S. 465.
—, Mitteilungen des mechanisch-technischen Laboratoriums zu München 1896, Heft 24.
—, Zeichnerische Berechnung der Zimmermannschen Kuppel, Zentralbl. d. Bauverw. 1901, S. 487.
—, Über räumliche Fachwerke, Zentralbl. d. Bauverw. 1902, S. 124.
Hacker, Über die Biegungsspannungen in Schwedlerschen Kuppeln bei gleichmäßig um den Mittelpunkt verteilter Belastung, Ztschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins z. Hannover 1888, S. 223.
—, Statische Bestimmung der Spannungen des Fachwerks im Raume bei schiefer Belastung, Ztschr. f. Bauwesen 1888, S. 42.
—, Über statisch bestimmbares Netzwerk und statisch unbestimmbares Fachwerk im Raume, Ztschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins z. Hannover 1890, S. 25.

Hacker, Ermittlung der Einflußlinien für die Spannkräfte des Stabwerks im Raume, Ztschr. d. Arch.- u. Ing.-Vereins z. Hannover 1892, S. 161.

A. Hasch, Zur Theorie des räumlichen Fachwerks, Ztschr. f. Math. u. Phys. 1903, S. 1.

L. Henneberg, Zur graphischen Zerlegung von Kräften, die an einem starren räumlichen System angreifen, Civiling. 1884, S. 381.

—, Die sogenannte Methode des Ersatzstabs, Zentralbl. d. Bauverw. 1903, S. 377.

F. Jasinski, Graphische Methode der Berechnung des Fußrings räumlicher Fachwerke, Schweiz. Bauztg. 1900, Bd. XXXV, S. 189.

Th. Landsberg, Neue Raumfachwerke (Besprechung des Zimmermannschen Buches), Zentralbl. d. Bauverw. 1901, S. 550.

—, Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks, Zentralbl. d. Bauverw. 1903, S. 221 u. 361.

Lodemann, Das Kuppeldach über dem Sitzungssaal des Reichstagshauses zu Berlin, Ztschr. f. Bauwesen 1897, S. 511.

G. Ch. Mehrtens, Über Raumfachwerke (Besprechung der Zimmermannschen Fachwerke), Deutsche Bauztg. 1902, S. 325.

O. Mohr, Über die Zusammensetzung der Kräfte im Raume, Civiling. 1876, S. 121.

—, Eine Aufgabe der graphischen Statik (Kräfte in sechs Richtungslinien im Gleichgewicht), Civiling. 1889, S. 237.

—, Beitrag zur Theorie des Raumfachwerks, Zentralbl. d. Bauverw. 1902, S. 205 u. 634.

—, Zur Berechnung der Raumfachwerke, Zentralbl. d. Bauverw. 1903, S. 237, 402, 641.

H. Müller-Breslau, Beiträge zur Theorie des räumlichen Fachwerks, Zentralbl. d. Bauverw. 1891, S. 437; 1892, S. 201, 225, 244, 256.

—, Beitrag zur Theorie der Kuppel- und Turmdächer und verwandter Konstruktionen, Ztschr. d. Ver. Deutsch. Ing. 1898, S. 1205, 1233.

—, Zur Theorie der Kuppel- und Turmdächer, Ztschr. d. Ver. Deutsch. Ing. 1899, S. 385.

—, Über räumliche Fachwerke, Zentralbl. d. Bauverw. 1902, S. 49, 61, 429, 501.

—, Zur Berechnung des Raumfachwerks, Zentralbl. d. Bauverw. 1903, S. 65, 298, 509, 523, 642.

—, Über die Bildungsgesetze ebener Fachwerke und deren Anwendung bei Bestimmung der Spannungen, Ztschr. f. Arch. u. Ing.wesen 1904, S. 33.

W. Schlink, Über räumliche Dachfachwerke, Ztschr. f. Arch. u. Ing.-wesen 1904, S. 183.

—, Über Kuppeln und räumliche Dachfachwerke, Vhdlgn. d. Vereins f. Gewerbfleiß 1904, S. 181.

W. Schlink, Brückenträger als Raumfachwerke, Vhdlgn. d. Vereins f. Gewerbfleiß 1905, S. 95.

—, Über Stabilitätsuntersuchungen von Raumfachwerken, Ztschr. d. Deutsch. Mathem.-Vereinigung, Bd. XVI, 1907.

W. Schwedler, Über die Konstruktion der Kuppeldächer, Ztschr. f. Bauw. 1866, S. 7.

R. Skutsch, Zerlegung einer Kraft in sechs Komponenten mit vorgeschriebenen Wirkungslinien, Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. 1902, S. 59.

W. Stäckel, Zur graphischen Behandlung der Kräfte im Raume, Ztschr. f. Math. u. Phys. 1898 (Bd. 43), S. 62.

W. Zimmermann, Das Raumfachwerk der Kuppel des Reichstagshauses, Zentralbl. d. Bauverw. 1901, S. 201, 209, 224.

Sachregister.

Die Zahlen bedeuten die Seiten des Buches.

Allgemeine Methode, der Kräftezerlegung 66.
— — bei Fachwerken; ihre Vorteile und Nachteile 129.
Auflager bei ebenen Systemen 49.
— bei räumlichen Trägern 144.
Auflagerkräfte, kommen bei den verschiedenen Kuppeln vor.
Ausgangssystem 34.
Ausnahmefall des 1. Bildungsgesetzes 5. 16. 84.
— des 2. Bildungsgesetzes 6. 16. 84.
— der Hennebergschen Gesetze 11. 20. 92.
— bei Zerlegung einer Kraft in 6 Richtungen 80.

Bedingungen der Ersatzstäbe 40. 99.
— der Knotenpunkte 41. 102.
Bedingungsgleichungen für allgemeines Gleichgewicht der Raumkräfte 76.
— s. auch Gleichungen.
Beispiel, spezielles mit 2 störenden Stäben bei Knotenpunktsbedingungen 104.
— — — bei Stabvertauschung 109.
—, spezielles mit 2 und 4 störenden Stäben 117.
Beispiel, Gerüstsystem mit spezieller Belastung 166.
—, Eingeschossige Scheibenkuppel bei gegebenen Lasten 288.
—, Mehrgeschossige Scheibenkuppel — 315.
—, Schwedler-Kuppel mit spezieller Belastung 193.
Berechnung nach Henneberg 18. 97.
— mittels der Methode des Ersatzstabes 31. 99.
— s. auch Spannungsermittlung.
Bestimmte Systeme 2. 3.
Bestimmtheit, unabhängig von äußeren Lasten 28. 91. 100.
Bewegliches System bei Hennebergs Bildungsgesetz 11. 92.
Bewegungslehre 43.
Bildung der Fachwerke mittels Stabvertauschung 10. 93.
— gestützter ebener Systeme 49.
— gestützter Raumsysteme 153.
Bildungsgesetz, erstes — für ebene Systeme 5. 15; für räumliche 84.
—, zweites, für ebene Fachwerke 6. 16; für räumliche 84.
— von Henneberg für ebene Fachwerke 12. 17; für räumliche 92.
Brückensysteme, räumliche 150.

Culmann, C. 16.
Culmanns Verfahren 58. 216.

Dachfachwerke 175.
—, Stabilitätsnachweis 359.
—, Berechnung 361.
Dachkonstruktion, gewöhnliche 175.
Determinante, allgemeine bei Spannungsuntersuchungen 24. 88.
—, allgemeine bei kinematischer Untersuchung 27. 90.
— der Stabvertauschung 39. 99.
Diagonalspannungen, spielen bei den verschiedenen Kuppelsystemen eine Rolle.

Ebenenlager 144.
Einflußzahlen 41. 47. 103.
Endsystem 34. 36. 94.
Erdfachwerk 48. 143. 243.
Ersatzstab 9.
Ersatzstäbe bei speziell gebauten Raumsystemen 100.
Ersatzstabverfahren 13. 31. 91.
Erweitertes System 49. 143.
—, Hennebergs Satz 146.

Fachwerk, Begriff desselben 1.
—, freies 2.
—, gestütztes 2.
Fachwerksträger 51, 149.
Firstfachwerk 358.
Flächenkuppel 257.
Flächenlager 144.
Flechtwerk von Föppl 139.
Flechtwerke, mehrfach zusammenhängende 141.
Flechtwerksdächer 361.
— mantel, — teil 242, 252.
— träger 156.
Föppl 2. 7. 42. 43. 79. 139. 175. 259. 266. 285. 309. 361.
Föppls Berechnung der Netzwerkkuppel 214.
Föppls Berechnung der Kuppeln mit Netzwerkfüllung 314.
— — der Schwedler-Kuppel 190.
— — der Zimmermann-Kuppel 232.
— Beweis, daß statisch bestimmte Systeme auch stabil sind 21. 86.
— Satz 27. 90. 168.
Formel für Anzahl der Lagerbedingungen einer offenen Kuppel 247.
— — einer geschlossenen Kuppel 249; eines Systems mit mehreren Öffnungen 252.
— von Mohr 51.

Gasometer, Führungsgerüste 155.
Gegendiagonalen 199.
Geradenlager 144.
Gerüstsysteme 155.
Geschlossene Kuppeln 351.
— —, Lagerung derselben 249.
Geschwindigkeiten 44.
Gestützte Systeme 48. 143.
Gewinnung von Kuppelsystemen 254.
Gleichungen, allgemeine zur Spannungsberechnung 22; für räumliche Systeme 88.
— — zur Bestimmung der Verrückungen 25. 90.
Graphische Kräftezerlegung 55.
— Berechnung der Flechtwerksdächer 364.
— — der Gerüstsysteme 166.
— — der Netzwerkkuppel 215.
— — der eingeschossigen Scheibenkuppel 285.
— — der mehrgeschossigen Scheibenkuppel 309.
— — der Schwedler-Kuppel 194.
— — der Zimmermann-Kuppel 232.
Gratspannungen (bei den verschiedenen Kuppeln).
Grenzfall bei Berechnung nach Henneberg 20.

Grenzfall bei Stabvertauschung 10.
Grenzkegelschnitt 11.
Grenzübergang 370.
Grübler 43. 48.
Grundaufgabe für kinematische Verfahren 131.
Grundlage für Spannungsermittlungen 14.
Grundstab, Grundfigur 34.
Gurtspannung (bei den verschiedenen Kuppeln).
Gurtung der Flechtwerksdächer 364.

Hacker 157.
Hennebergs Berechnung bei Fachwerken 19. 35. 97.
— Beweis, daß jedes stabile System statisch bestimmt ist 20.
— Bildungsgesetz 11; für Raumsysteme 92.
— Reduktionsgesetz 35. 92.
— Satz für das erweiterte System 52. 147.
— Spannungsberechnung 20. 97.
— Zusatz zu Föppls Satz 29. 91. 368.
Herstellung gestützter Raumsysteme 153.
— beliebiger geschlossener Kuppeln 357.
— beliebiger offener Kuppeln 254.
Homogene Gleichungen 29.

Ikosaeder 255.

Jasinski, F. 376.

Kegelschnitt, Grenz- 11.
Kinematisch bestimmt, unbestimmt, überbestimmt 2.
Kinematische Bestimmtheit, allgemeine Determinante 27.
Kinematische Verfahren 43.
Kinematisches Verfahren von Müller-Breslau für ebene Systeme 43; für Raumsysteme 131.
— — von Mohr 135.
Knotenpunkt 2; n-facher 12.
Knotenpunktsbedingungen 41. 102.
—, Verfahren von Mohr 127.
Knotenpunktslasten 15. 21.
Koeffizienten der allgemeinen Fachwerksgleichungen 22.
Komponenten der Diagonalspannungen 318.
Kräfteparallelepiped 54.
Kräftezerlegung in 3 Richtungen im Raume 53.
— in 6 Richtungen im Raume 76.
Krangerüste 173.
Kugellager 144.
Kuppel, mehrgeschossige Scheiben- 260.
— mit Netzwerkfüllung 266.
—, Netzwerk- 210.
—, Scheiben- 255.
—, Schwedler- 176.
—, Zimmermann- 220.
Kuppelbildungen 242.
Kuppelflechtwerk 241.
Kuppeln, geschlossene 351.
—, offene 247.
Kurvenlager 144.

Labile gelagerte Ringe 157. 375.
— Netzwerkkuppeln 212. 378.
— Schwedler-Kuppeln 179. 182.
— Systeme 30.
Lager von ebenen Systemen 50.
— von Raumsystemen 144.
Lagerreaktionen 49.
Lagerring 179.
Lagerstäbe 49.
Lagerungen, verschiedene der Schwedler-Kuppel 178.
—, — der Zimmermann-Kuppel 237.

Landsberg, Berechnung der Schwedler-Kuppel 201.
—, — der Zimmermann-Kuppel 223.
Lang, G. 34. 43. 48.
Längsbinderdach 363.
Laststab 33. 127.
Laterne 353.
Leipziger Kuppel 261.
Levy, M. 26.
Linienlager 144.
Löhles Sägedächer 366.
Lotrechte Belastung auf die einfache Scheibenkuppel 290.
— — auf die mehrgeschossige Scheibenkuppel 321.
— Geschwindigkeiten 44.

Mehrfache Stabvertauschung 38. 99.
Menschengedränge (Scheibenkuppel) 335.
Methode des Ersatzstabes 13. 31. 98.
— von Henneberg 11. 30. 92. 98.
—, kinematische von Mohr 135.
—, — von Müller-Breslau 43. 129.
— der Knotenpunktsbedingungen 41.
— — von Mohr 127.
—, Momenten- 139.
— der Stabvertauschung 10. 31. 94.
Modell eines Flechtwerksdachs 365.
Mohr, O. 3. 26. 33. 42. 43.
Mohrscher Grenzfall 10.
— kinematisches Verfahren 135.
— Methode der Knotenpunktsbedingungen 127.
— Satz 51.
— Verfahren bei Kräftezerlegung 72.
Moment einer Kraft im Raume 68.
Momenten-Achsenpaar 79.
Momentengleichung 48.
Momentenmethode für Fachwerke, allgemeines 139.
Momentenmethode bei Kräften mit demselben Angriffspunkt 68.
— bei 6 Kräften im Raume 79.
— bei der Scheibenkuppel 268. 301.
— bei der Schwedler-Kuppel 201.
— bei der Zimmermann-Kuppel 223.
Müller-Breslau 42. 70. 160. 197. 375.
— Berechnung der Schwedler-Kuppel 197.
— Ersatzstabverfahren 13. 31. 38. 94.
— kinematisches Verfahren für die Ebene 43; für den Raum 130.
— Verfahren der Kräftezerlegung 59.
Multiplikatoren 39. 101.
— Berechnung ohne diese bei Stabvertauschung 41. 101.

Nachtrag 368.
Nebenkonstruktion 355.
Netzwerkfüllung; Kuppeln mit — 266.
Netzwerkkuppeln 210. 374.
— über quadratischem Raum 219.
— als spezielle Formen der Zimmermann-Kuppel 230.
Nullsystem 80. 84.

Offene Kuppeln 242. 252.

Parallelepiped 54.
Pascalsches Sechseck 48.
Pendelstütze 144.
Pfeilergerüste 170.
Pol, Polstrahlen 45.
Polygonalmethode 15.
Prinzip der virtuellen Verrückungen 43. 129.
Prismaflechtwerk 141.
Prismengerüstsysteme 162.
Projektionsmethode bei Kräftezerlegung 61.
— Schwedler-Kuppel 207.
Pyramidenflechtwerk 141.

Quadratisch, Netzwerkkuppel über —em Raum 219.

Reduktionsgesetz (Henneberg) 12. 35. 92.
Reduziertes (abgeleitetes) System 12.
Regel von Föppl für Berechnung von Kuppeln mit Netzwerkfüllung 314.
—, Hennebergs Bildungsgesetz 13. 92.
—, Müller-Breslaus für Ersatzstäbe 34. 36. 94.
Resultante 42. 102. 357.
Ring, auf Rollenlagern in Ebene gestützt 157.
— — Berechnung desselben 167.
—, labiles System 182.
—, genauere Untersuchung 375.
Ringstäbe (bei den verschiedenen Kuppeln).
Ritter, A. 16.
Rittersche Methode 68. 77.
Rollenlager 144.

Sägedach 366.
Scheibenkuppel 257.
—, Beispiel für eingeschossige — 288.
—, — für mehrgeschossige — 315.
—, analytische Berechnung 268. 300.
—, graphische Berechnung 285. 309.
—, Stabilitätsuntersuchung 258. 260.
Schlink 51. 151.
Schneelast 334.
Schnittmethode 16.
Schub 363.
Schubgeschwindigkeit 136.
Schwedler-Kuppel 141. 176.
—, Berechnung (Föppl) 190.
—, — (Schwedler) 187.
—, — Momenten- und Projektionsmethode 201.
—, — mit Zerlegungsverfahren 193.
Schwedler-Kuppel, Gegendiagonalen 199.
— auf Rollenlagern 178.
—, labile Systeme 179. 182.
— mit Zeltdach 353.
— als spezielle Form der Zimmermann-Kuppel 280.
Sechseck, labiles 10.
Senkrechte Geschwindigkeit 44.
Sonderfälle der Zimmermann-Kuppel 230.
Spannungen 2.
Spannungsermittlung der Dachfachwerke 361.
— der Fachwerke nach Henneberg 18. 97.
— — mittels Knotenpunktsbedingungen 41. 102.
— — bei mehrfacher Stabvertauschung 38. 99.
— der Flechtwerksdächer 361.
— der Netzwerkkuppel 215.
— der Scheibenkuppel 268. 285.
— der mehrgeschossigen Scheibenkuppel 300. 309.
— der Schwedler-Kuppel 187.
— der Systeme nach dem 1. Bildungsgesetz 15. 91.
— — nach dem 2. Bildungsgesetz 16. 91.
— mittels des erweiterten Systems 52. 147.
— der geschlossenen Systeme 355.
Sparrenpolygon 364.
Spezielle Stabanordnung an einem Knotenpunkt 76.
— — bei Kräften mit verschiedenen Angriffspunkten 83.
Spezielles Beispiel bei ebener Stabvertauschung 37; bei Raumsystemen 100.
— — s. auch Beispiel.
Stabiles System 1.